Höhere Mathematik III

Lösungen zum 3. Übungsblatt

1) Es gilt

$$u_x(x,y) = e^x \left[\cos(y)\sin(x)\cosh(y) - \sin(y)\cos(x)\sinh(y)\right] + e^x\left[\cos(y)\cos(x)\cosh(y) + \sin(y)\sin(x)\sinh(y)\right]$$

$$u_y(x,y) = e^x \Big[\sin(x)\left[-\sin(y)\cosh(y) + \cos(y)\sinh(y)\right] - \cos(x)\left[\cos(y)\sinh(y) + \sin(y)\cosh(y)\right]\Big]$$

sowie

$$v_x(x,y) = e^x\left[\sin(y)\sin(x)\cosh(y) + \cos(y)\cos(x)\sinh(y)\right] + e^x\left[\sin(y)\cos(x)\cosh(y) - \cos(y)\sin(x)\sinh(y)\right]$$

$$v_y(x,y) = e^x\Big[\sin(x)\left[\cos(y)\cosh(y) + \sin(y)\sinh(y)\right] + \cos(x)\left[-\sin(y)\sinh(y) + \cos(y)\cosh(y)\right]\Big]$$

Vergleich ergibt: $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

Weiter ist

$$u_{xx}(x,y) = e^x [\cos(y)\sin(x)\cosh(y) - \sin(y)\cos(x)\sinh(y) + \cos(y)\cos(x)\cosh(y) + \sin(y)\sin(x)\sinh(y)]$$
$$+ e^x [\cos(y)\cos(x)\cosh(y) + \sin(y)\sin(x)\sinh(y) - \cos(y)\sin(x)\cosh(y) + \sin(y)\cos(x)\sinh(y)]$$

und

$$u_{yy}(x,y) = e^x [\sin(x) [-\cos(y)\cosh(y) - \sin(y)\sinh(y) - \sin(y)\sinh(y) + \cos(y)\cosh(y)]$$
$$- \cos(x) [-\sin(y)\sinh(y) + \cos(y)\cosh(y) + \cos(y)\cosh(y) + \sin(y)\sinh(y)]].$$

Damit gilt $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$

Für v ist

$$v_{xx}(x,y) = e^x [\sin(y)\sin(x)\cosh(y) + \cos(y)\cos(x)\sinh(y) + \sin(y)\cos(x)\cosh(y) - \cos(y)\sin(x)\sinh(y)]$$
$$+ e^x [\sin(y)\cos(x)\cosh(y) - \cos(y)\sin(x)\sinh(y) - \sin(y)\sin(x)\cosh(y) - \cos(y)\cos(x)\sinh(y)]$$

und

$$\begin{aligned} v_{yy}(x,y) = \; & e^x \Big[\sin(x) \big[-\sin(y)\cosh(y) + \cos(y)\sinh(y) \\ & \qquad + \cos(y)\sinh(y) + \sin(y)\cosh(y) \big] \\ & + \cos(x) \big[-\cos(y)\sinh(y) - \sin(y)\cosh(y) \\ & \qquad - \sin(y)\cosh(y) + \cos(y)\sinh(y) \big] \Big] . \end{aligned}$$

Also ist auch v harmonisch (wegen $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$).

Die Funktionen u und v sind folglich konjugiert harmonisch.

(2) a) Es sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $u(x,y) = g(xy) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

Nun gilt nach der Kettenregel

$$u_x(x,y) = g'(xy) \cdot y,$$
$$u_{xx}(x,y) = g''(xy) \cdot y^2,$$
$$u_y(x,y) = g'(xy) \cdot x \quad \text{und}$$
$$u_{yy}(x,y) = g''(xy) \cdot x^2.$$

Folglich ist $(\Delta u)(x,y) = g''(xy)\underbrace{(x^2+y^2)}_{>0, \text{ für } (x,y) \neq (0,0)}$.

Damit u harmonisch ist, also $\Delta u = 0$ gilt, muss

also $g''(xy) = 0$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ gelten, also

insbesondere $g''(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Da g'' stetig ist, muss also $g''(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten,

und folglich ist g von der Form $g(t) = at + b$ mit

$a, b \in \mathbb{R}$.

b) Nun sei $g(t) = 2t - 1$, also $u(x,y) = 2xy - 1$.

Da u nach Teil a) harmonisch ist, existiert eine

holomorphe Funktion f, so dass u Realteil dieser

Funktion f ist.

Den Imaginärteil der Funktion f bestimmt man folgendermaßen:

Da $f = u + iv$ holomorph sein soll, müssen die CRD erfüllt sein, also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ gelten.

1. $u_x(x,y) = 2y = v_y(x,y) \Rightarrow v(x,y) = y^2 + c(x)$

2. $u_y(x,y) = 2x = -v_x(x,y) \Rightarrow \frac{d}{dx} c(x) = -2x$

$$\Rightarrow c(x) = -x^2 + c$$

Also ist v von der Gestalt $v(x,y) = y^2 - x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Damit hat f die Form

$$f(z) = f(x+iy) = 2xy - 1 + i(y^2 - x^2 + c)$$

$$= -iz^2 - 1 + ic$$

3

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

a) Für $z \neq 0$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff f(z) = \overline{f(z)} \iff z\bar{z}\, f(z) = z\bar{z}\, \overline{f(z)}$$

$$\iff z\bar{z}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z\bar{z}\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right)$$

$$\iff z|z|^2 + \bar{z} = \bar{z}|z|^2 + z \iff (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0.$$

Die Funktionswerte sind folglich dann reell, wenn $z - \bar{z} = 0$, also wenn z reell ist, oder wenn $|z|^2 - 1 = 0$, d.h. wenn $|z| = 1$ gilt, also z auf der Einheitskreislinie liegt.

Für die Ableitung gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = 0$$ genau dann,

wenn $1 - \frac{1}{z^2} = 0$, also $z^2 = 1$, also $z = \pm 1$ ist.

Die Funktion f ist somit für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ konform.

b) Es ist $G = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0 \} = \{ re^{i\varphi} : r > 0,\ \varphi \in (-\pi, 0) \}$

Wir betrachten das Bild von Halbkreisen in der unteren Halbebene ($r > 0$, $\varphi \in (-\pi, 0)$):

$$w = f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}re^{i\varphi} + \frac{1}{2r}e^{-i\varphi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

$$=: a\cos\varphi + ib\sin\varphi =: u + iv .$$

Da $\varphi \in (-\pi, 0)$ ist dies die Parametrisierung einer Halbellipse mit Mittelpunkt im Ursprung, wobei die Halbachsen durch $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ und $|b| = \frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$ gegeben sind.

Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $0 < r < 1 \Rightarrow a \in (1, \infty),\ b \in (-\infty, 0)$

$$\underset{\varphi \in (-\pi, 0)}{\Rightarrow} u \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty), \quad v \in (0, \infty)$$

$\Rightarrow$ Ellipse in der oberen Halbebene

2. Fall: $r = 1 \Rightarrow a = 1,\ b = 0$

$$\underset{\varphi \in (-\pi, 0)}{\Rightarrow} u \in (-1, 1),\ v = 0$$

$\Rightarrow$ Entartete Ellipse, d.h. das Intervall $(-1, 1)$ auf der reellen Achse.

3. Fall: $r > 1 \Rightarrow a \in (1, \infty),\ b \in (0, \infty)$

$$\underset{\varphi \in (-\pi, 0)}{\Rightarrow} u \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty), \quad v \in (-\infty, 0)$$

$\Rightarrow$ Ellipse in der unteren Halbebene

Da G die Vereinigung obiger Halbkreise ist, ist $f(G)$ die Vereinigung obiger Halbellipsen, also

$$f(G) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$$
$$= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, |\operatorname{Re} z| \geq 1\}.$$

Dies ist die gesamte komplexe Zahlenebene ohne den Abschnitt der reellen Achse, für den $|\operatorname{Re} z| \geq 1$ gilt.

Zur Injektivität: Es seien $z_1, z_2 \in G$ mit $f(z_1) = f(z_2)$.

Offensichtlich gilt

$$f(z_1) = f(z_2) \iff z_1 z_2 f(z_1) = z_1 z_2 f(z_2)$$
$$\iff z_1 z_2 \left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = z_1 z_2 \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$$
$$\iff z_1^2 z_2 + z_2 = z_1 z_2^2 + z_1$$
$$\iff (z_1 - z_2)(z_1 z_2 - 1) = 0.$$

Also muss $z_1 - z_2 = 0$ oder $z_1 z_2 - 1 = 0$ gelten.

Letzteres ist nicht möglich, denn zu $z_1, z_2 \in G$ gibt es $r_1, r_2 > 0$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, 0)$ mit $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$ $(j = 1, 2)$, also $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Wegen $r_1, r_2 > 0$ sowie $\varphi_1 + \varphi_2 \in (-2\pi, 0)$ folgt $z_1 z_2 \notin \mathbb{R}_+$, d.h. $z_1 z_2 \neq 1$. Es muss somit $z_1 = z_2$ gelten.

Also ist f injektiv.

4 Die fragliche Gerade hat die Darstellung

$$\vec{x} = \overrightarrow{ON} + \lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{ON} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) .$$

Der Schnittpunkt mit S ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung der Sphäre:

$$(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (1-\lambda)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + 1) - 2\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda [\lambda (x_1^2 + x_2^2 + 1) - 2] = 0 .$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen: Für $\lambda = 0$ ergibt sich der Punkt N, den anderen Schnittpunkt liefert $\lambda = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$; er hat die Koordinaten

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, 1-\lambda) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} , \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} , \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right).$$

Dies läßt sich auch mittels $z = x_1 + ix_2$ ausdrücken:

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten

$$\left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{|z|^2+1} \,,\, \frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|z|^2+1} \,,\, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).$$