WS 06/07

Höhere Mathematik III

Lösungen zum 6. Übungsblatt

(1) Es bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller Möbiustransformationen, d.h

$$\mathcal{M} = \left\{ T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \;\middle|\; T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \hat{\mathbb{C}}), \quad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0 \right\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{M}$ mit der Hintereinanderausführung „$\circ$" eine Gruppe bildet, d.h. dass gilt

1. $S, T \in \mathcal{M} \Rightarrow T \circ S \in \mathcal{M}$ („$\circ$" ist eine Verknüpfung)
2. $R, S, T \in \mathcal{M} \Rightarrow (T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ (Assoziativität)
3. Es ex. $E \in \mathcal{M}$ mit $E \circ T = T \circ E$ $(T \in \mathcal{M})$ (neutrales Element)
4. Zu jedem $T \in \mathcal{M}$ existiert $S \in \mathcal{M}$ mit $T \circ S = S \circ T = E$ (inverses Element)

zu 1. Es seien $S, T \in \mathcal{M}$ mit

Assoziierte Matrix

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \hat{\mathbb{C}}) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und

$$T(z) = \frac{ez+f}{gz+h} \quad (z \in \hat{\mathbb{C}}), \qquad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

wobei $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0 \neq eh - gf$.

Es sei $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Dann ist $(T \circ S)(z) = T(S(z))$

$$= \frac{e\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + f}{g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + h} = \frac{\frac{eaz+eb}{cz+d} + \frac{fcz+fd}{cz+d}}{\frac{gaz+gb}{cz+d} + \frac{hcz+hd}{cz+d}}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{(ea+fc)z + (eb+fd)}{(ga+hc)z + gb+hd}.$$

Assoziierte Matrix

$$\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

Weiter ist $0 \neq \det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

$$= \det\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

$$= (ea+fc)(gb+hd) - (ga+hc)(eb+fd).$$

Folglich ist $T \circ S$ eine Möbiustransformation.

(Dabei ist noch im einzelnen zu überlegen, ob bei (*) für die Fälle $cz+d=0$, $z=\infty$, $\frac{az+b}{cz+d}=\infty$, beide Seiten gleich sind.)

Zu 2.: Es seien $R, S, T \in M$, mit

	Assoziierte Matrix
$R(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \hat{\mathbb{C}})$,	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$S(z) = \frac{ez+f}{gz+h} \quad (z \in \hat{\mathbb{C}})$,	$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$
und $T(z) = \frac{jz+k}{lz+m} \quad (z \in \hat{\mathbb{C}})$,	$\begin{pmatrix} j & k \\ l & m \end{pmatrix}$

mit $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l, m \in \mathbb{C}$,
$ad-bc \neq 0 \neq eh-fg$, $0 \neq jm-lk$.

Gemäß 1. wird $T \circ (S \circ R)$ vermittelt durch

$$\begin{pmatrix} j & k \\ l & m \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} j & k \\ l & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei die letzte Matrix, die $(T \circ S) \circ R$ vermittelnde Matrix angibt.

Aufgrund der Gleichheit der Matrizen, gilt also $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R$.

zu 3.: Neutrales Element: Betrachtet man

$$E(z) = z = \frac{z+0}{0\cdot z+1} \qquad (z\in\hat{\mathbb{C}}),$$

so ist für alle $T\in\mathcal{M}$ und $z\in\hat{\mathbb{C}}$

$$(E\circ T)(z) = E(T(z)) = \frac{az+b}{cz+d} = T(E(z)) = T(z).$$

Folglich ist E das neutrale Element von $(\mathcal{M},\circ)$.

zu 4.: Inverses Element: Es sei $S(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

mit $ad-bc \neq 0$.

Assoziierte Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Nun ist $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Setze nun

$$T(z) = \frac{\frac{1}{\det A}(dz-b)}{\frac{1}{\det A}(-cz+a)} = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

mit $da-bc \neq 0$.

Nach 1. gilt für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$:

$$(T \circ S)(z) = T(S(z)) = \frac{(da - bc)z + db - bd}{(-ca + ac)z + (-cb) + ad}$$

$$= \frac{ad - bc}{ad - bc} z = z = E(z)$$

Entsprechend $(S \circ T)(z) = S(T(z)) = E(z)$. $(z \in \hat{\mathbb{C}})$.

(2)

Ansatz $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

$T(-1) = 0 \Rightarrow -a+b = 0 \Rightarrow a = b$.

$T(i) = \infty \Rightarrow cz+d = 0$ für $z = i$

$\Rightarrow d = -ic$.

Bisher: $T(z) = \dfrac{az+a}{cz-ic} = \dfrac{a}{c}\,\dfrac{z+1}{z-i}$.

$1 \overset{!}{=} T(1+i) = \dfrac{a}{c}\,\dfrac{2+i}{1} \Rightarrow c = (2+i)a$.

Gesamt:

$$T(z) = \frac{az+a}{(2+i)az - i(2+i)a} = \frac{z+1}{(2+i)z + 1 - 2i}$$

3

$T: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ist definiert durch $T(z) = -i\,\dfrac{z-1}{z+1}$.

a) Es gilt: $T(z) = w = -i\,\dfrac{z-1}{z+1} \iff iw\,(z+1) = z-1$

$$\iff iw + 1 = z(1 - iw) \iff z = \frac{iw+1}{-iw+1}$$

$$\iff T^{-1}(w) = z = \frac{w-i}{-w-i}$$

b) Es ist $T(z) \in i\cdot\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(T(z)) = 0$

$$\iff \frac{1}{2}\left(T(z) + \overline{T(z)}\right) = 0 .$$

$$\iff T(z) = -\overline{T(z)}$$

$$\iff -i\,\frac{z-1}{z+1} = -i\,\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$$

$$\iff (z-1)(\bar{z}+1) = (\bar{z}-1)(z+1)$$

$$\iff z - \bar{z} = \bar{z} - z$$

$$\iff z = \bar{z}$$

$$\iff z \in \mathbb{R}.$$

c) Definitionsgemäß ist $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

$$= \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)} = -i\,\frac{e^{2it} - 1}{e^{2it} + 1} = T(e^{2it}).$$

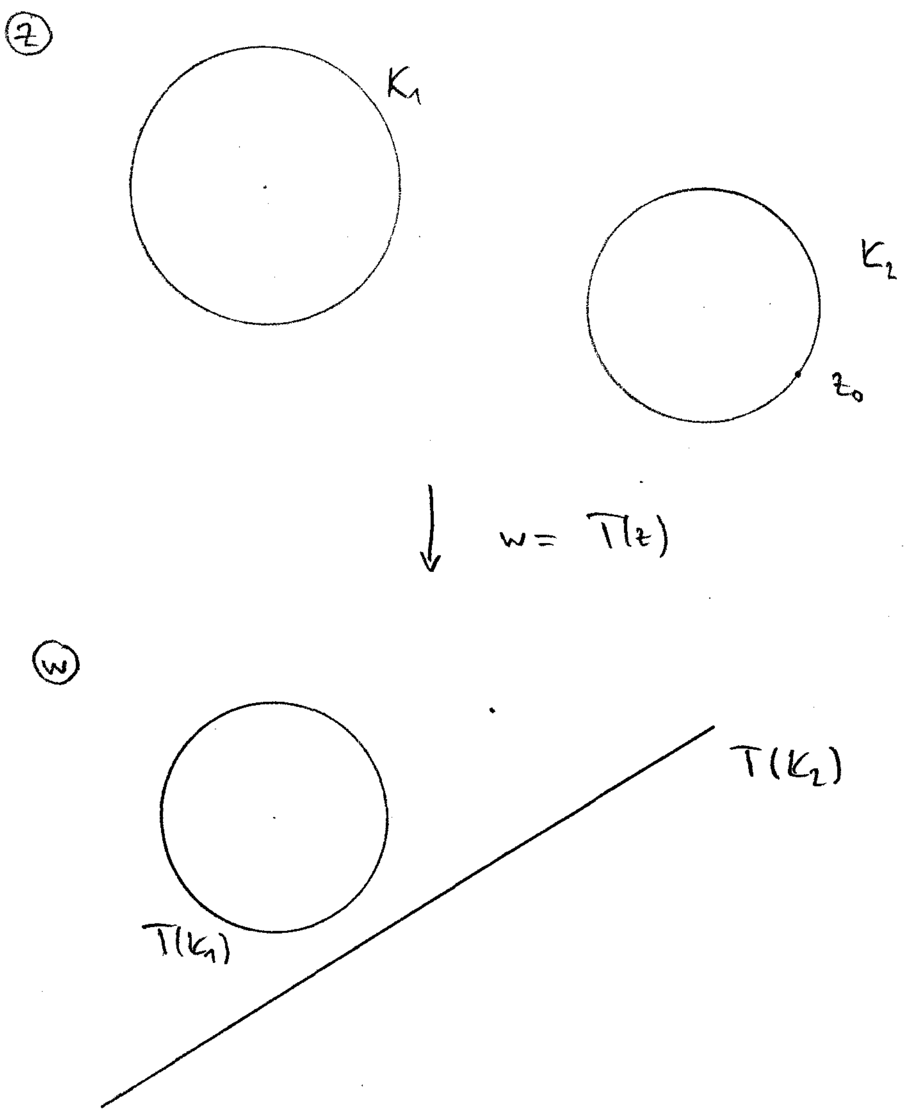
Nach Teil b) ist somit $\tan z \in i\mathbb{R}$ genau dann, wenn e^{2iz} reell ist.

Nun ist $e^{2iz} = e^{-2y+2ix} = e^{-2y}\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right)$,

also $\operatorname{Im}(e^{2iz}) = 0$ genau dann, wenn $\sin(2x) = 0$ gilt. Dies ist bekanntlich genau für $x = \frac{\pi}{2}k$ $(k \in \mathbb{Z})$ erfüllt.

4

a)



Wähle $z_0 \in K_2$. Betrachte $T(z) = \dfrac{z}{z - z_0}$

(wobei $z_0 \neq 0$ vorausgesetzt wurde, damit T nicht konstant).

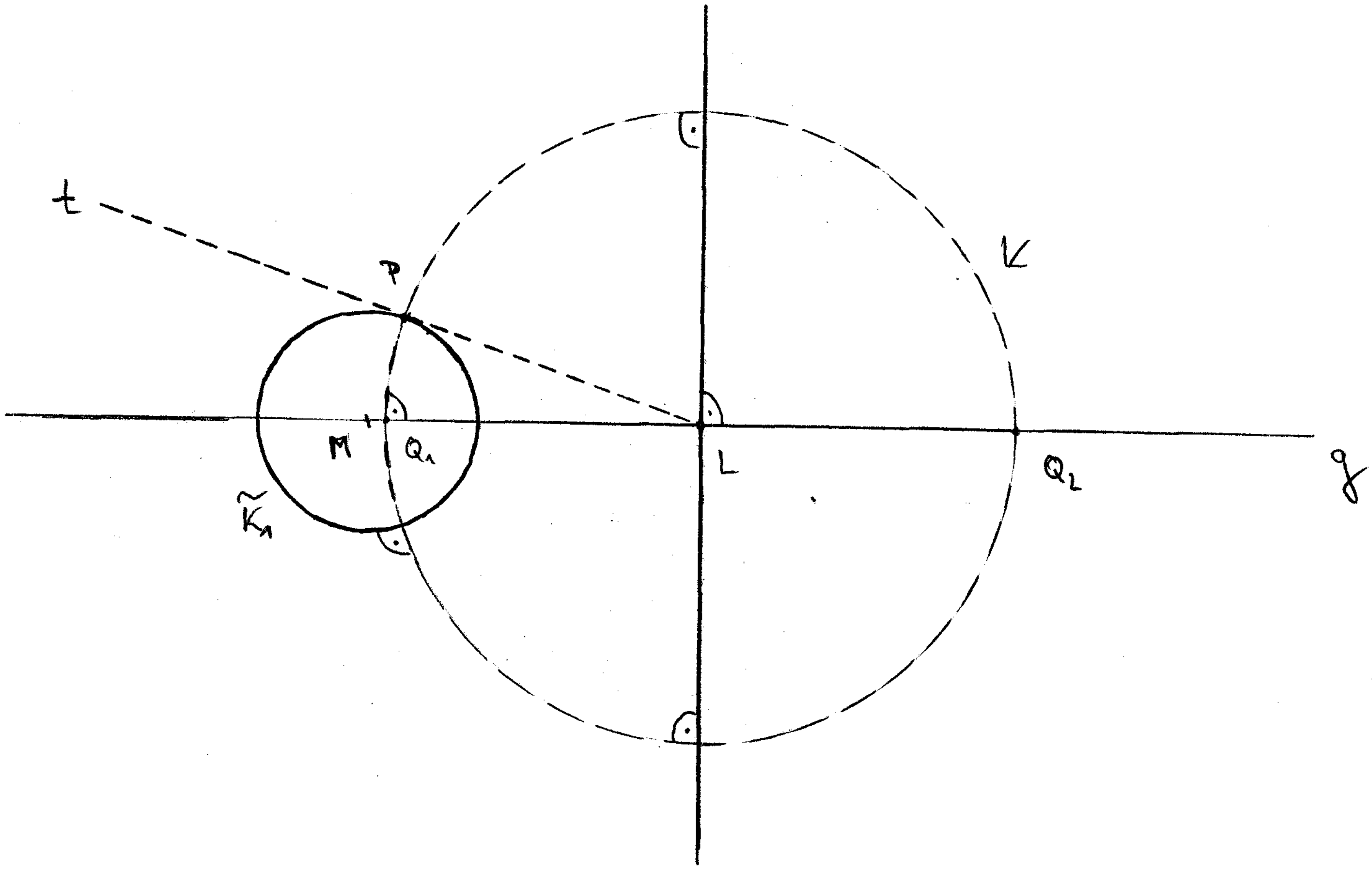
Da $T(z_0) = \infty$ ist, folgt: $T(K_2)$ ist eine Gerade.

Da $z_0 \notin K_1$, ist $T(K_1)$ ein Kreis.

Weiter gilt wegen $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, dass $T(K_1) \cap T(K_2) = \emptyset$.

b) Mittels a) werden K_1, K_2 auf einen Kreis $\tilde{K}_1$ und eine Gerade $\tilde{K}_2$ abgebildet ($\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 = \emptyset$).

Betrachte die folgende Konstruktion:



1. Fälle Lotgerade g durch Mittelpunkt M von $\tilde{K}_1$ auf $\tilde{K}_2$.
   $g \cap \tilde{K}_2 = \{L\}$.

2. Konstruiere die Tangente t durch L an $\tilde{K}_1$.
   $t \cap \tilde{K}_1 = \{P\}$.

3. Konstruiere Kreis K um L durch P.
   Q_1, Q_2 seien die Schnittpunkte von g und K.

Setze $S(z) = \dfrac{z - Q_1}{z - Q_2}$ $\quad (\leadsto S(Q_1) = 0 \,,\, S(Q_2) = \infty)$.

$Q_2 \in g \Rightarrow S(g)$ ist eine Gerade (da $S(Q_2) = \infty \in S(g)$).

$Q_2 \in K \Rightarrow S(K)$ ist eine Gerade

$Q_2 \notin \widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2 \Rightarrow S(\widetilde{K}_1), S(\widetilde{K}_2)$ sind Kreise.

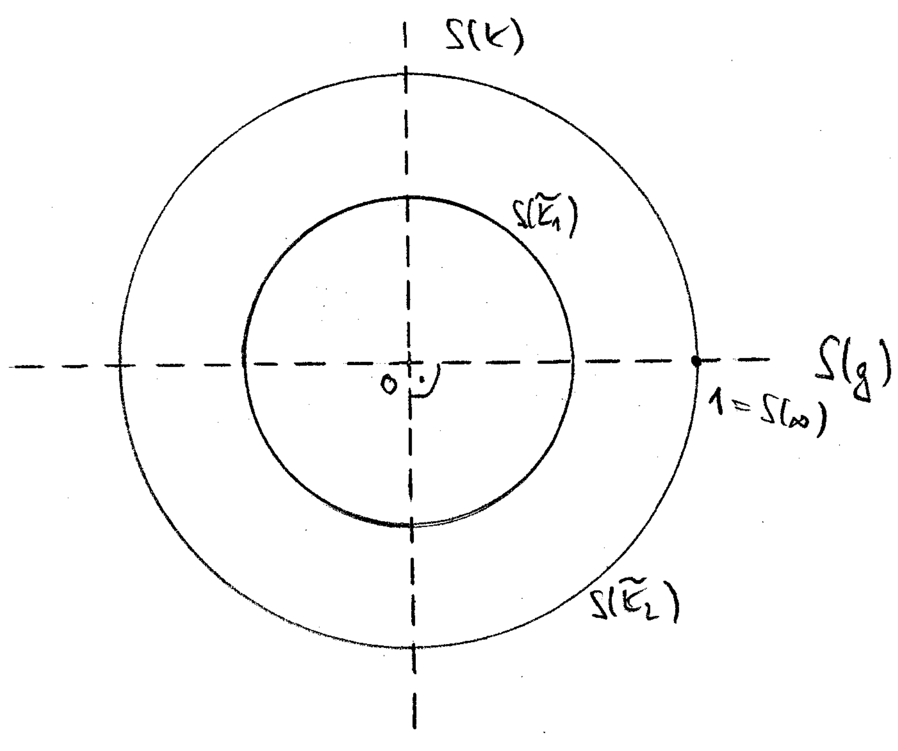
Weiter schneidet g den Kreis K in Q_1 unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ Gerade $S(g)$ schneidet Gerade $S(K)$ in $S(Q_1) = 0$ unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$.

g und K schneiden $\widetilde{K}_1$ und $\widetilde{K}_2$ je zweimal unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ (beachte: $g \cap \widetilde{K}_2 = \{L, \infty\}$).

$\Rightarrow$ Die Geraden $S(g)$ und $S(K)$ schneiden die zwei Kreise $S(\widetilde{K}_1)$ und $S(\widetilde{K}_2)$ je zweimal unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$.

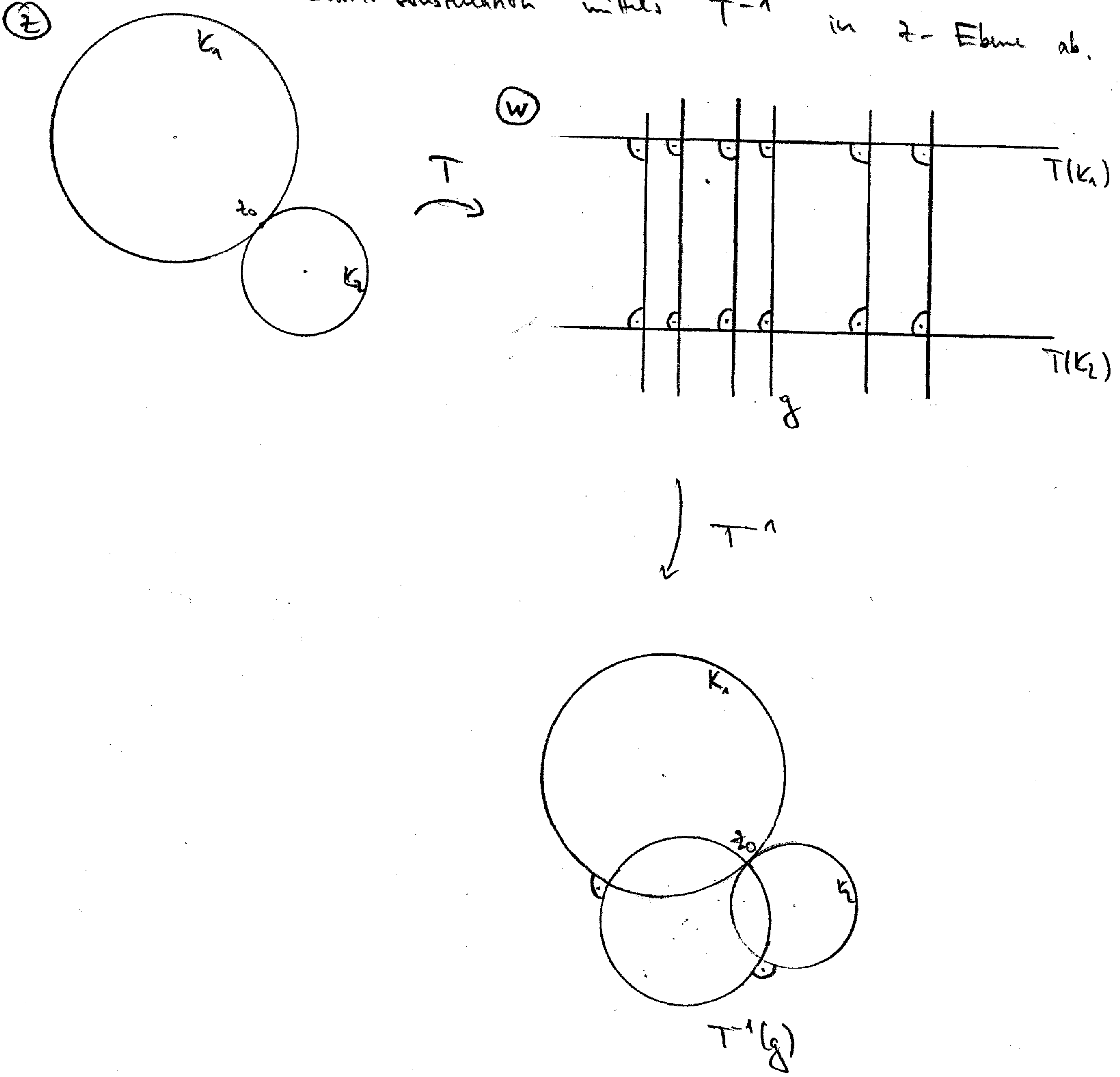
$\Rightarrow S(\widetilde{K}_1)$ und $S(\widetilde{K}_2)$ sind konzentrisch



5

a) Die Kreislinien K_1 und K_2 besitzen (mindestens) einen gemeinsamen Punkt.

<u>1. Fall:</u> K_1 berührt K_2 in z_0. Bilde gemäß Skizze mittels Möbiustransformation T ab $\left(T(z) = \frac{1}{z-z_0}\right)$, konstruiere Geradenschar im Bildbereich und bilde Gesamtkonstellation mittels T^{-1} in z-Ebene ab.

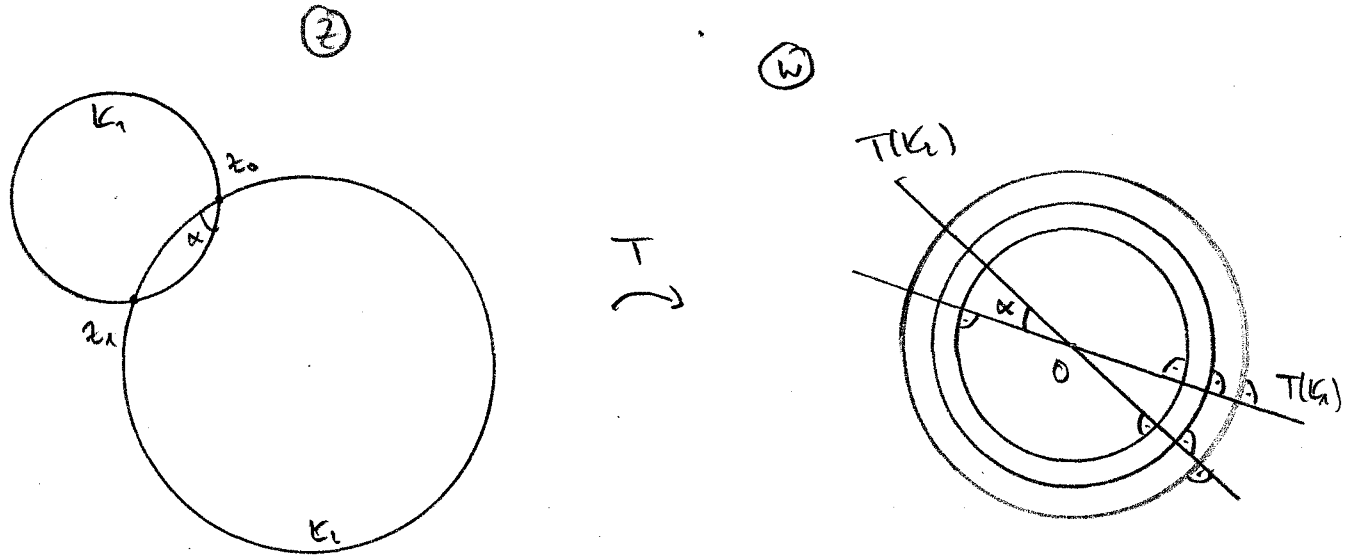


$w = T(z)$ mit $T(z_0) = \infty$ $\Rightarrow$ $T(K_1)$, $T(K_2)$ sind Geraden (da $z_0 \notin K_1, K_2$), die sich in ∞ unter dem Winkel 0 schneiden (da K_1 und K_2 sich berühren)

$\Rightarrow$ $T(K_1)$ ist zu $T(K_2)$ parallel.

<u>2. Fall:</u> K_1 schneidet K_2 in z_0 und z_1.

$w = T(z) = \dfrac{z - z_0}{z - z_1}$; Kreisschar mit Mittelpunkt 0 in w-Ebene, Rückabbildung mit T^{-1}.



b) Bilde K_1, K_2 (in z-Ebene) mittels Möbiustransformation T auf konzentrische Kreise (mit Mittelpunkt 0) in w-Ebene ab.
Konstruiere Geradenschar (= Menge aller Geraden durch 0.
Jede Gerade dieser Schar schneidet $T(K_1)$, $T(K_2)$ unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$.
Rückabbildung mit T^{-1} ergibt die gewünschte Konstellation.