Höhere Mathematik III

Lösungen zum 9. Übungsblatt

(1)

a) $$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\pi + (z-i\pi)} + e^{-i\pi - (z-i\pi)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{z-i\pi} + e^{-(z-i\pi)}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z-i\pi)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k (z-i\pi)^k\right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(z-i\pi)^{2n}.$$

Daher $$f^{(k)}(i\pi) = \begin{cases} 0 & , \ k \text{ ungerade} \\ -1 & , \ k \text{ gerade} \end{cases}$$

b) $$\frac{z^2}{(z+i)^2} = \frac{(i + (z-i))^2}{(2i + (z-i))^2}$$

$$= \frac{(z-i)^2 + 2i(z-i) - 1}{-4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^2}$$

Für $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$, also $|z-i| < 2$ ergibt sich mit

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, q^k \qquad \text{für } |q| < 1$$

das Folgende

$$\frac{z^2}{(z+i)^2} = \left(-\frac{1}{4}\right)\left((z-i)^2 + 2i(z-i) - 1 \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \left(\frac{z-i}{2i}\right)^k$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{i}{2}\right)^k (z-i)^{k+2}$$

$$- \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{i}{2}\right)^k (z-i)^{k+1}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{i}{2}\right)^k (z-i)^k$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)(k-1) \left(\frac{i}{2}\right)^{k-2} (z-i)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{2}\right) k \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} (z-i)^k$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4}(k+1) \left(\frac{i}{2}\right)^k (z-i)^k$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left[-\frac{1}{4}(k-1)\left(\frac{i}{2}\right)^{k-2} - \frac{i}{2}\, k \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{4}(k+1)\left(\frac{i}{2}\right)^{k}\right] (z-i)^k$$

$$- \frac{i}{2}(z-i) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{i}{2}(z-i)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{i}{4}(z-i) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^k (k-3)\,(z-i)^k$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(i)\,(z-i)^k$$

Also $\quad f(i) = \frac{1}{4}\,, \quad f'(i) = -\frac{i}{4}\,.$

$$f^{(k)}(i) = \frac{k!}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^k (k-3) \qquad \text{für } k = 2, 3, \dots$$

c) Es ist

$$f(z) = \int_0^z \frac{\cos\zeta - 1}{\zeta^2}\, d\zeta$$

$$= \int_0^z \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\zeta^{2k}\right) - 1}{\zeta^2}\, d\zeta$$

$$= \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\zeta^{2(k-1)}\, d\zeta$$

$$= \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \zeta^{2k} \, d\zeta$$

$$\underset{\substack{\text{lok. glm.} \\ \text{konv.}}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \int_0^z \zeta^{2k} \, d\zeta$$

$$\underset{\substack{\gamma(t) = t \cdot z \quad (t \in [0,1]) \\ \gamma'(t) = z}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \int_0^1 t^{2k} z^{2k} \cdot z \, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} z^{2k+1} \frac{1}{2k+1} \left[t^{2k+1} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)! \, (2k+1)} z^{2k+1}$$

$$\underset{(\text{Taylor})}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

Also $f^{(k)}(0) = 0$, falls k gerade. Ist k ungerade, also $k = 2n+1$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, so ist

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)! \, (2n+1)} = \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{(k+1)! \, k},$$

also gilt $f^{(k)}(0) = \dfrac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{(k+1)k}$ für ungerades k.

(2)

Für z aus dem Konvergenzbereich der Potenzreihe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^{n+2}$$

$$= 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} + a_n) z^{n+2}$$

$$= 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} \cdot z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot z^2$$

$$= 1 + z + z \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - 1 \right) + z^2 \left(\sum_{n=0} a_n z^n \right)$$

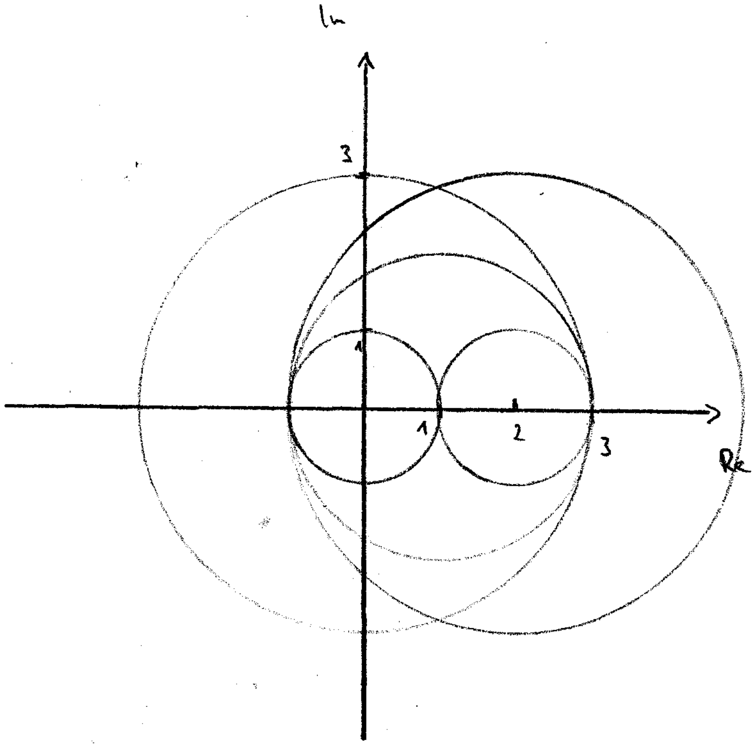
$$= 1 + (z + z^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \right).$$

Daher gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

auf dem Konvergenzbereich der Reihe.

3



a) Die Funktion
$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$$
$$= \frac{1}{(1-z)(1+z)} + \frac{1}{3-z}$$

ist holomorph im Kreisring $R := \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3 \}$.

Folglich besitzt f dort eine Laurententwicklung der Form
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n .$$

$z \in R$ erfüllt nun die Ungleichungen $\frac{1}{|z|} < 1$ und $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$.

Daher gilt
$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{\frac{1}{z^2} - 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

$$\underset{\substack{\text{geom.}\\ \text{Reihe}}}{=} \left(-\frac{1}{z^2}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k}\right) + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^k .$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)\, z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^k =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Folglich ist

$a_n = -1$ für $n = -2, -4, \dots$

$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

$a_n = 0$, sonst .

b)

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} + \frac{1}{3-z}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z}$$

ist holomorph im Kreisring $S = \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2| < 3 \}$.

Folglich besitzt f dort eine Laurententwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-2)^n .$$

Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{-1-(z-2)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3+(z-2)} + \frac{1}{1-(z-2)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-2}\,\frac{1}{-1-\frac{1}{z-2}} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} + \frac{1}{z-2}\,\frac{1}{-1+\frac{1}{z-2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{2-z}{3}} - \frac{1}{z-2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z-2}}$$

$\left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$

$\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z-2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (z-2)^{-k}$$

$$+ \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k(-1)^k (z-2)^k$$

$$- \frac{1}{z-2}\sum_{k=0}^{\infty}(z-2)^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^k - 1\right)(z-2)^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^k (z-2)^k$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^{1-n} - 1\right)(z-2)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n (z-2)^n}_{\text{Potenzreihe}}$$

c) Singularitäten von f sind -1, 1 und 3.

f ist in $T = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2 \}$ holomorph, also besitzt f dort eine Laurententwicklung mit Entwicklungspunkt $z_0 = 1$.

Da $1+3i \in T$, konvergiert diese Laurentreihe in $1+3i$.

Für $|z-1| > 2$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)} + \frac{1}{3-z}$$

$$= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{2+(z-1)} + \frac{1}{2-(z-1)}$$

$$= -\frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}} - \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}$$

$$= -\frac{1}{(z-1)^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k (z-1)^{-k} - \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (z-1)^{-k}$$

$\frac{2}{|z-1|} < 1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)(-2)^k (z-1)^{-(k+2)} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)\, 2^k (z-1)^{-(k+1)}$$

$$= -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=-\infty}^{-2} \underbrace{\left[(-1)(-2)^{-k-2} + (-1)\, 2^{-k-1} \right]}_{= (-1)\, 2^{-k-2} \left((-1)^k \cdot 2 + 1 \right)} z^k$$

(4)

a) Es ist $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - z - 12} = \dfrac{z}{(z-4)(z+3)}$.

Daher besitzt f an den Stellen 4 und -3 einfache Pole.

Für die Residuen gilt

$$\operatorname{Res}(f, 4) = \lim_{z \to 4} (z-4) \cdot f(z) = \frac{4}{7}, \text{ sowie}$$

$$\operatorname{Res}(f, -3) = \lim_{z \to -3} (z+3) f(z) = \frac{3}{7}.$$

b) Es gilt $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^3} = \dfrac{1}{(z-2i)^3 \cdot (z+2i)^3}$.

Daher besitzt f an den Stellen $2i$ und $-2i$ Polstellen 3. Ordnung.

Für die Residuen gilt

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2i} \left((z-2i)^3 f(z) \right)''$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2i} \left((z+2i)^{-3} \right)''$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 2i} (-3)(-4)(z+2i)^{-5}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(-3)(-4)}{(4i)^5} = -\frac{3i}{2^9}$$

$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to -2i} \left((z+2i)^3 f(z) \right)''$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -2i} \left((z-2i)^{-3} \right)''$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to -2i} 12 \, (z-2i)^{-5}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \, \frac{1}{(-4i)^5} = \frac{3i}{2^9} .$$

c)

$$f(z) = \frac{\sin z - z}{z^2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} - z}{z^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1}$$

$$= -\frac{1}{3!} z + \frac{1}{5!} z^3 - \dots$$

$\Rightarrow$ $z = 0$ ist hebbare Singularität, $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$.

d) In $z_0 = 1$ liegt ein Pol der Ordnung 2 vor, und für das Residuum gilt

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \left((z-1)^2 f(z) \right)'$$

$$= \lim_{z\to 1} \left(e^{\frac{1}{z}} \cdot \left(-\frac{1}{z^2} \right) \right) = -e .$$

Um eine Aussage über die Singularität in $z=0$ treffen zu können, betrachten wir die Laurententwicklung im Kreisring $R = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 \}$. Dort gilt:

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \cdot e^{1/z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} \right)$$

$$\underset{\text{auf } R}{\overset{\text{abs. konv.}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{n!} z^{k-n} .$$

Folglich liegt in $z=0$ eine wesentliche Singularität vor.
$\frac{1}{z}$ – Terme treten auf, falls $k-n = 1$ gilt, also $n = k+1$ ist. Der Vorfaktor von z^{-1} lautet dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{n!} \underset{n=k+1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = \operatorname{Res}(f, 0) .$$

e) Die Funktion $f(z) = z \cdot \sin \frac{1}{z}$ besitzt eine Singularität in $z_0 = 0$.

Diese ist wesentlich, denn es gilt

$$f(z) = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}}_{\neq 0} z^{-2k} .$$

Weiter gilt $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$ wie man aus aus der Laurentreihe abliest.

f) Die Funktion $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1+\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{1}{1-z}}$

besitzt in $z = 1$ eine wesentliche Singularität, denn es gilt:

$$f(z) = \frac{1}{e}\, e^{\frac{1}{1-z}} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k (z-1)^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{k!\,e}}_{\neq 0} (z-1)^{-k}$$

Weiter ist $\mathrm{Res}(f, 1) = -\frac{1}{e}$