WS 2006/2007

Höhere Mathematik III

Lösungen zum 10. Übungsblatt

(1) In den folgenden Aufgabenteilen bezeichnen wir den Integranden jeweils mit f.

a) Die Funktion f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, und an diesen Stellen liegen Pole 1. Ordnung vor, denn $\cos(\pm i) \neq 0$.

Diese beiden Polstellen befinden sich im Innern des von der geschlossenen Integrationskurve begrenzten Gebietes, daher liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; i) + \operatorname{Res}(f; -i) \right).$$

Für die Residuen erhält man

$$\operatorname{Res}(f; \pm i) = \left. \frac{\cos z}{(z^2+1)'} \right|_{z=\pm i} = \left. \frac{\cos z}{2z} \right|_{z=\pm i}$$

$$= \pm \frac{\cos(\pm i)}{2i} = \pm \frac{\cos(i)}{2i}.$$

Wegen $\mathrm{Res}(f; -i) = -\mathrm{Res}(f; i)$ hat das Integral also den Wert 0.

b) Die Funktion f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ und besitzt in $z_0 = 0$ einen einfachen, in $z_1 = -1$ einen zweifachen Pol.

Da sich beide Polstellen im Innern des von der geschlossenen Integrationskurve begrenzten Gebietes befinden, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, -1) \right).$$

Für die Residuen gilt:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z}{z(z+1)^2} = 1, \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{1!} \left(\frac{(z+1)^2}{z(z+1)^2} \right)'$$

$$= \lim_{z \to -1} \left(\frac{1}{z} \right)' = \lim_{z \to -1} -\frac{1}{z^2} = -1.$$

Wiederum ergibt sich als Integralwert 0.

c)

Die Funktion ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, und in $z_0 = -1$ liegt ein Pol der Ordnung 4 vor.

Für das Residuum erhalten wir

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{3!} \left((z+1)^4 \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} \right)^{(3)}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \lim_{z \to -1} 8 e^{2z}$$

$$= \frac{4}{3} e^{-2}.$$

Aus dem Residuensatz erhält man folglich $\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{4}{3} e^{-2}$

$$= \frac{8\pi i}{3e^2}.$$

d) Der Nenner von f wird genau dann 0, wenn $z = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $z = 0$ im Innern des Kreises $|z| = 1$.

Daher ist

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Anhand der Darstellung

$$f(z) = \frac{z}{e^{iz} - 1} = \frac{z}{\left(1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \ldots\right) - 1}$$

$$= \frac{1}{i - \frac{1}{2} z + \dots}$$

sehen wir, dass sich f um den Punkt 0 in eine Potenzreihe entwickeln läßt.
In $z = 0$ liegt also eine hebbare Singularität vor, und somit ist $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$, und das Integral hat den Wert 0.

e) Hier liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1).$$

Um das Residuum zu berechnen, betrachten wir die Laurent-entwicklung von f

$$f(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\frac{-(1-z)+1}{1-z}} = e^{-1} e^{-\frac{1}{z-1}}$$

$$= e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^{-k}.$$

Der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ ist $\operatorname{Res}(f; 1) = -e^{-1}$,

also ist

$$\int_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}}\, dz = -\frac{2\pi i}{e}.$$

f) Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners von f:

$$\cosh z = 1 \iff e^z + e^{-z} = 2$$

$$\iff e^{2z} + 1 = 2e^z \iff (e^z)^2 - 2e^z + 1 = 0.$$

Das Polynom $u^2 - 2u + 1$ hat die doppelte Nullstelle 1, daher wird der Nenner des Integranden genau dann 0, wenn $e^z = 1$, also $z = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Der Rand des Gebietes G wird durch die Gleichung

$$y^2 = (4\pi - 1)(1 - x^2), \quad \text{d.h.} \quad x^2 + \frac{y^2}{4\pi - 1} = 1$$

dargestellt; dies ist eine Ellipse um den Punkt 0 mit den Halbachsen 1 und $\sqrt{4\pi - 1}$.

Wegen $\sqrt{4\pi - 1} < \sqrt{4\pi^2} = 2\pi$ liegt nur die isolierte Singularität $z_0 = 0$ im Inneren der Integrationskurve. Es gilt also gemäß Residuensatz

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Mit Hilfe der Darstellung

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\cosh z - 1}{z} = \frac{\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right) - 1}{z}$$

$$= \frac{1}{2!} z + \frac{1}{4!} z^3 + \dots ,$$

sieht man, dass f in $z = 0$ einen Pol der Ordnung 1 hat.

Folglich ist

$$\operatorname{Res}(f;0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} z^2 + \dots} = 2 ,$$

d.h. das zu berechnende Integral hat den Wert $4\pi i$.

2

Das zu berechnende Integral ist von der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$$ mit der rationalen Funktion

$$R(x,y) = \frac{y}{5-4y}.$$

Die Funktion $t \mapsto R(\sin t, \cos t)$ ist stetig auf $[0, 2\pi]$.

Daher läßt sich dieses Integral gemäß der Vorlesung als Kurvenintegral schreiben, und wir erhalten:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{iz}\, dz,$$

wobei $f(z) := R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)$ gilt.

Der Integrand des Kurvenintegrals ist

$$g(z) := \frac{f(z)}{iz} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5 - 4\,\frac{z^2+1}{2z}}$$

$$= \frac{1}{iz} \cdot \frac{z^2+1}{10z - 4(z^2+1)} = \frac{z^2+1}{-i(4z^3 - 10z^2 + 4z)}.$$

Diese Funktion g hat die Nullstellen des Nenners als isolierte Singularitäten:

Wegen
$$4z^3 - 10z^2 + 4z = 4z\left(z^2 - \tfrac{5}{2}z + 1\right) = 4z(z-2)\left(z - \tfrac{1}{2}\right)$$

sind dies $z_0 = 0$, $z_1 = 2$ und $z_2 = \frac{1}{2}$.

Da der Punkt $z_1 = 2$ außerhalb des von der Integrationskurve umschlossenen Gebietes $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ liegt, die Punkte $z_0 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{2}$ aber innerhalb, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{iz}\, dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(g;0) + \operatorname{Res}\left(g;\tfrac{1}{2}\right)\right].$$

In $z_0 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{2}$ hat der Nenner von g einfache Nullstellen, der Zähler ist $\neq 0$.

Für die Residuen erhält man daher

$$\operatorname{Res}(g;0) = \left.\frac{z^2+1}{-i(4z^3 - 10z^2 + 4z)'}\right|_{z=0} = \left.\frac{z^2+1}{-i(12z^2 - 20z + 4)}\right|_{z=0} = -\frac{1}{4i}.$$

$$\operatorname{Res}\left(g, \frac{1}{2}\right) = \left.\frac{z^2+1}{-i\,(12z^2-20z+4)}\right|_{z=\frac{1}{2}}$$

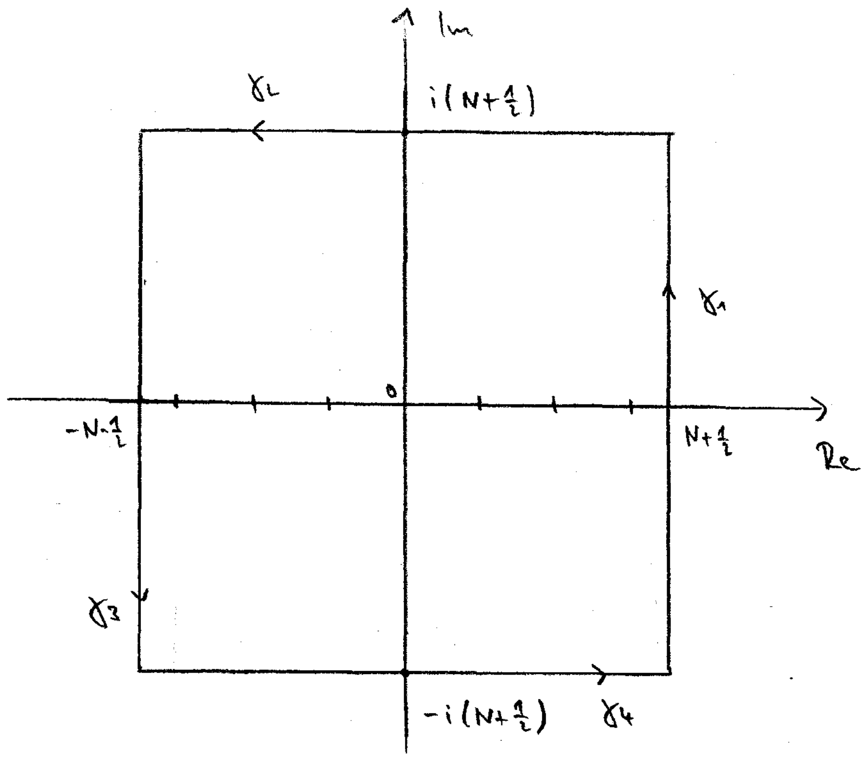
$$= \frac{\frac{1}{4}+1}{-i\,(3-10+4)} = \frac{\frac{5}{4}}{3i} = \frac{5}{12i}.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5-4\cos t}\,dt = 2\pi i\left(-\frac{1}{4i}+\frac{5}{12i}\right)$$

$$= 2\pi i\,\frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$

③ WS 06/07



a) Es sei $f(z) = \dfrac{\pi}{z^2 \sin(\pi z)}$ $\quad (z \in \mathbb{C})$.

Die Singularitäten von f liegen in den Punkten vor, in denen der Nenner verschwindet, d.h. $z^2 \sin(\pi z) = 0$ ist.

Es gilt $z^2 \sin(\pi z) = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ oder $z = k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist, da der Sinus nur reelle Nullstellen besitzt.

Im Fall $z = 0$ hat f einen Pol der Ordnung 3

(wegen $f(z) = \dfrac{\pi}{z^2\left(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \dots\right)} = \dfrac{g(z)}{z^3}$

mit einer holomorphen Funktion g mit $g(0) \neq 0$), und im Falle $z = k$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ besitzt

f einfache Pole (da diese einfache Nullstellen des Nenners sind).

<u>Berechnung der zugehörigen Residuen:</u>

1. bei $z_0 = 0$, Laurententwicklung für $z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{\pi}{z^2} \frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{z^2} \cdot \frac{1}{\left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \dots\right)}$$

$$= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{\pi^2}{6} z^2 + \dots\right)}_{=:q}}.$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{\underset{|q|<1}{=}} \frac{1}{z^3} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} z^2 + \dots \right]$$

$$\overset{\text{Umordnen}}{=} \frac{1}{z^3} + \frac{\pi^2/6}{z} + \text{hol.}$$

Daher ist $\text{Res}(f, 0) = \frac{\pi^2}{6}$

2. bei $z_k = k$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: Da einfache Polstellen vorliegen gilt

$$\text{Res}(f, z_k) = \left. \frac{\pi}{[z^2 \sin(\pi z)]'} \right|_{z = z_k}$$

$$= \left.\frac{\pi}{2z\sin(\pi z) + z^2\pi\cos(\pi z)}\right|_{z=z_k}$$

$$= \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Daher gilt nach dem Residuensatz

$$(*) \quad \int_{\Gamma_n} \frac{\pi}{z^2\sin(\pi z)}\,dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}\right].$$

b) <u>Behauptung</u>: $\left|\frac{\pi}{\sin \pi z}\right| \leq \pi \quad (z \in \Gamma_n,\ n \in \mathbb{N})$

Es ist $\Gamma_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

<u>Fall 1</u>: Es sei $z \in \gamma_1, \gamma_3$. Also ist z von der Form

$$z = \pm(n+\tfrac{1}{2}) + iy \quad \text{mit} \quad |y| \leq n + \tfrac{1}{2}.$$

Folglich ist

$$|\sin(\pi z)| = |\sin(\pi[\pm(n+\tfrac{1}{2}) + iy])|$$

$$= \left|\pm\sin(\pi(n+\tfrac{1}{2}))\cos(iy) + \cos(\pi(n+\tfrac{1}{2}))\sin(iy)\right|$$

$$= \left| \pm \underbrace{\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right)}_{=\pm 1} \cosh y + \underbrace{\cos\left(\pi\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right)}_{=0} \sin(iy) \right|$$

$$= |\cosh y| \geq 1 .$$

Also gilt $\left| \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right| \leq \pi$ für $z \in \gamma_1, \gamma_3$.

Fall 2: Es sei $z \in \gamma_2, \gamma_4$; also z von der Form

$z = x \pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)$ mit $|x| \leq n + \frac{1}{2}$.

Dann ist

$$\sin(\pi z) = \frac{1}{2i}\left[e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\underbrace{e^{\mp\pi(n+\frac{1}{2})} \cdot e^{i\pi x}}_{|\cdot| = e^{\mp\pi(n+\frac{1}{2})}} - \underbrace{e^{\pm\pi(n+\frac{1}{2})} e^{-i\pi x}}_{|\cdot| = e^{\pm\pi(n+\frac{1}{2})}}\right]$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|v+w| \geq \big||v| - |w|\big|$ erhalten wir

$$|\sin(\pi z)| \geq \frac{1}{2}\left| e^{\mp\pi(n+\frac{1}{2})} - e^{\pm\pi(n+\frac{1}{2})}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\pi(n+\frac{1}{2})} - e^{-\pi(n+\frac{1}{2})}\right)$$

$$= \sinh\left(\pi\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

1

und somit

$$\left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| \leq \frac{\pi}{\sinh\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)} \leq \pi \quad \text{für } z \in \gamma_2, \gamma_4$$

c) Mit (*) gilt

$$\frac{\pi^2}{6} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\pi}{z^2 \sin(\pi z)} \, dz .$$

Für das Integral gilt allerdings

$$\Bigg| \int_{\Gamma_n} \underbrace{\frac{\pi}{\sin \pi z}}_{\substack{|\cdot| \leq \pi, \\ \text{für } z \in \Gamma_n}} \cdot \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{\substack{|\cdot| \leq \frac{1}{n^2}, \\ \text{für } z \in \Gamma_n}} \, dz \Bigg| \leq \overbrace{\underbrace{4 \cdot 2\left(n+\tfrac{1}{2}\right)}_{\text{Länge von } \Gamma_n} \cdot \underbrace{\pi \cdot \frac{1}{n^2}}_{\text{Abschätzung für } |f(z)| \text{ für } z \in \Gamma_n}}^{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

nach b) und wegen $|z| \geq n$ für alle $z \in \Gamma_n$.

Somit gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

④ Nach dem Residuensatz gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_a \operatorname{Res}\left(a, \frac{f'}{f}\right).$$

⌈ „Summation" über alle von γ umschlossenen $a \in G$.
Es liefern aber nur Pole und wesentliche Singularitäten
⌊ von f'/f einen Beitrag, denn sonst ist $\operatorname{Res} = 0$.

Singularitäten von $\frac{f'}{f}$, die von γ umlaufen werden, sind:

1. Nullstellen von f im „Inneren" von γ:
   Ist n_j k_j-fache Nullstelle von f, so gilt

$$f(z) = (z - n_j)^{k_j} \cdot h(z)$$

(mit einer in n_j holomorphen Funktion h, und $h(n_j) \neq 0$).

Also gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_j (z - n_j)^{k_j - 1} \cdot h(z) + (z - n_j)^{k_j} h'(z)}{(z - n_j)^{k_j} h(z)}$$

$$= \frac{k_j}{z - n_j} + \underbrace{\frac{h'(z)}{h(z)}}_{\text{holomorph in } n_j}$$

Folglich besitzt $\frac{f'}{f}$ in n_j einen einfachen Pol, und es ist $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, n_j\right) = k_j$.

2. Pole von f (von γ umschlossen).

Es sei p_ℓ ein m_ℓ-facher Pol von f. Dann läßt sich f schreiben als

$$f(z) = \frac{H(z)}{(z-p_\ell)^{m_\ell}},$$

wobei H holomorph in p_ℓ ist, und $H(p_\ell) \neq 0$ gilt.

Damit ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m_\ell (z-p_\ell)^{-m_\ell-1} \cdot H(z) + (z-p_\ell)^{-m_\ell} H'(z)}{(z-p_\ell)^{-m_\ell} \cdot H(z)}$$

$$= \frac{-m_\ell}{z-p_\ell} + \underbrace{\frac{H'(z)}{H(z)}}_{\text{hol. in } p_\ell}$$

$\frac{f'}{f}$ besitzt also in p_ℓ einen einfachen Pol mit

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, p_\ell\right) = -m_\ell.$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\sum \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = \sum_j \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}; n_j\right) + \sum_l \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}; p_l\right)$$

$$= \underbrace{\sum_j k_j}_{} - \underbrace{\sum_l m_l}_{} = N_\gamma - P_\gamma \,.$$

Gesamtzahl der Null- bzw. Polstellen.