Höhere Mathematik III

Lösungen zum 11. Übungsblatt

(1)

Das AWP

$$x y (1+x^2) y' = 1+ y^2 \quad , \quad y(1) = 2$$

lässt sich für $x, y > 0$ umschreiben zu

$$y' = \underbrace{\frac{1+y^2}{y}}_{= g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x(1+x^2)}}_{= f(x)} \quad , \quad y(1) = 2 \, .$$

Es liegt daher eine DGL mit getrennten Veränderlichen vor.

Kalkül: Es ist

$$\int_{\eta=2}^{y} \frac{\eta}{1+\eta^2} \, d\eta = \int_{\xi=1}^{x} \frac{d\xi}{\xi(1+\xi^2)} \quad ,$$

also

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) - \frac{1}{2} \ln(5) = \int_1^x \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{1+\xi^2} \right) d\xi$$

$$= \left[\ln|\xi| - \frac{1}{2} \ln(1+\xi^2) \right]_1^x$$

$$= \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln(2) \quad ,$$

und damit $\ln(1+y^2) = \ln(5) + \ln(2) + \ln x^2 - \ln(1+x^2)$

$$= \ln \frac{10x^2}{1+x^2} ,$$

also $y(x) = \sqrt{\frac{10x^2}{1+x^2} - 1}$ (positive Wurzel wegen $y(1) = 2$).

b)

Die DGL $y' = x e^{x^2 - 2y} = x e^{x^2} \cdot e^{-2y}$

ist eine DGL mit getrennten Veränderlichen.

Kalkül:

Es ist $\int^y e^{2\eta} \, d\eta = \int^x \xi e^{\xi^2} \, d\xi ,$

daher $\frac{1}{2} e^{2y} = \frac{1}{2} e^{x^2} + c ,$

und folglich $e^{2y} = e^{x^2} + \tilde{c}$.

Aufgrund der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ergibt sich $\tilde{c} = 0$.

Daher gilt $e^{2y} = e^{x^2}$, also $y(x) = \frac{1}{2} x^2$.

c)

Bei dem Anfangswertproblem

$$(\ast) \qquad y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x) \quad , \quad y(0) = 1$$

liegt eine inhomogene lineare DGL 1. Ordnung vor.

Die zugehörige homogene Gleichung lautet

$$y' + y\cos(x) = 0 .$$

Mit Hilfe des Lösungskalküls für DGLn mit getrennten Veränderlichen erhalten wir:

$$y' + y\cos(x) = 0 \iff y' = -\cos(x)\, y \quad ,$$

also $\dfrac{dy}{dx} = -\cos(x)\, y \quad ,$

damit $\displaystyle\int^{y} \frac{1}{\eta}\, d\eta = \int^{x} -\cos(\xi)\, d\xi$ und

folglich $\ln|y| = -\sin x + \tilde{C}$.

Daher ist

$$y_{hom}(x) = C \cdot e^{-\sin x} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Lösung der homogenen DGL.

Eine Lösung der inhomogenen DGL erhalten wir mit der Methode der Variation der Konstanten.

<u>Ansatz:</u> $y(x) = C(x) \cdot e^{-\sin(x)}$.

Damit ist $y'(x) = C'(x) \cdot e^{-\sin(x)} + C(x)(-\cos x)\, e^{-\sin x}$.

Eingesetzt in (*) ergibt dies

$$C'(x)\, e^{-\sin x} + C(x)(-\cos x)\, e^{-\sin x} + C(x)\, e^{-\sin x} \cos(x)$$

$$= \sin(x) \cos(x)\,,$$

also $C'(x)\, e^{-\sin x} = \sin x \cos x\,,$

und damit $C'(x) = e^{\sin x} \sin x \cos x$.

Integration liefert

$$C(x) = \int^x \underbrace{e^{\sin t} \cos t}_{v'}\, \underbrace{\sin t}_{u}\, dt$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} e^{\sin x} \sin x - \int^x e^{\sin t} \cos t \, dt$$

$$= e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} = e^{\sin x} (\sin x - 1).$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist daher

$$y_{inh}(x) = \sin x - 1.$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet folglich

$$y(x) = C e^{-\sin x} + \sin x - 1 .$$

Wegen $y(0) = 1$ muss somit

$$1 = C - 1 \quad , \text{ also } \quad C = 2 \quad \text{gelten.}$$

Die Lösung des AWPs lautet daher

$$y(x) = 2 e^{-\sin x} + \sin x - 1 .$$

d) Dem AWP $y' + xy + \frac{1}{2}(xy)^3 = 0 \; , \; y(0) = \sqrt{2} \; , \qquad (*)$

liegt eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 3$ zugrunde.

Setzt man $z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y^2}$, so erhält man

$$z' = -\frac{2}{y^3} \cdot y' \overset{(*)}{=} -\frac{2}{y^3}\left(-xy - \frac{1}{2}x^3 y^3\right)$$

$$= \frac{2x}{y^2} + x^3 = 2xz + x^3 ,$$

also die inhomogene lineare DGL

$(**) \quad z' - 2xz = x^3$ mit der Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{2}$.

Zur Lösung der homogenen Gleichung:

Es ist $z' - 2xz = 0$, also $\frac{dz}{dx} = 2xz$ und

daher $\int^{z} \frac{1}{\eta}\, d\eta = \int^{x} 2\xi\, d\xi$ und

somit $\ln|z| = x^2 + \tilde{c}$.

Folglich ist die Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$z(x) = C e^{x^2} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung benutzen wir nicht den Ansatz der Variation der Konstanten.

Es sei also $z(x) = C(x) \cdot e^{x^2}$.

Dann ist $z'(x) = C'(x) \cdot e^{x^2} + C(x)\, e^{x^2} \cdot 2x$.

In die Gleichung (**) eingesetzt ergibt dies

$$C'(x)\, e^{x^2} + C(x)\, e^{x^2} \cdot 2x - 2x\, z(x) = x^3,$$

also

$$C'(x)\, e^{x^2} = x^3.$$

Mittels partieller Integration erhält man

$$C(x) = \int^x e^{-\eta^2}\eta^3\, d\eta = \left(-\frac{1}{2}\right)\int^x \underbrace{\left(e^{-\eta^2}2\eta\right)}_{=v'}\underbrace{\eta^2}_{u}\, d\eta$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[e^{-x^2}x^2 - \int^x 2\eta e^{-\eta^2}\, d\eta\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left[e^{-x^2}x^2 - e^{-x^2}\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}\left(x^2-1\right).$$

Also ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL in (**) gegeben durch

$$z_{inh}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-1\right),$$

und somit die allgemeine durch

$$z(x) = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right).$$

Beachtet man die Anfangsbedingung $z(0) = \frac{1}{2}$, so folgt

$$\frac{1}{2} = C - \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad C = 1,$$

also $z(x) = e^{x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$ als Lösung des AWPs (**).

Schließlich erhalten wir

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)}}$$

als Lösung des anfänglichen AWPs (*).

(Die Lösung des AWPs existiert allerdings nur auf einem linksseitig beschränkten Intervall $(-a, \infty)$ mit $a > 0$.)

2

a) Gegeben sei die DGL $y' = (y+4x)^2$

Mit der Substitution $z := y + 4x$ erhalten wir

$z' = y' + 4$, also $y' = z' - 4$ und folglich

$z' = z^2 + 4$.

Dies ist eine DGL mit getrennten Veränderlichen.

Kalkül: $\int^z \frac{1}{\eta^2+4}\, d\eta = \int^x 1\, d\xi$,

also $\frac{1}{4} \int^z \frac{1}{1+\left(\frac{\eta}{2}\right)^2}\, d\eta = x + c$,

also $\frac{1}{2} \arctan \frac{z}{2} = x + \tilde{c}$ mit $\tilde{c} \in \mathbb{R}$,

also $z = 2 \tan(2x + c_2)$ und mittels

Resubstitution $y(x) = -4x + 2\tan(2x + c)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

b) Wir betrachten die DGL $y' = (x+y)^2 - (x+y) - 1$.

Die Substitution $z = x+y$ liefert $z' = 1 + y'$,

also

$z' - 1 = z^2 - z - 1$, also $z' = z(z-1)$.

Die Fälle $z=0$ und $z=1$ sind Lösungen, d.h.

$y = -x$, sowie $y = 1-x$.

Für $z \neq 0$ bzw $z \neq 1$ erhalten wir mittels unseres Kalküls:

$$\int^{z} \frac{1}{\eta(\eta-1)}\, d\eta = \int^{x} 1\, d\xi \ ,$$

also $$\int^{z} \left(-\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta-1}\right) d\eta = x + c_1 \quad \text{mit } c_1 \in \mathbb{R} \ ,$$

also $$-\ln|z| + \ln|z-1| = x + c_1 \ ,$$

und daher $$\frac{z-1}{z} = c_2 e^{x} \quad \text{mit } c_2 \in \mathbb{R} \ ,$$

also $$1 - \frac{1}{z} = c_2 e^{x} \ ,$$

schließlich $$z = \frac{1}{1 - c_2 e^{x}} \ .$$

Also gilt $$y(x) = \frac{1}{1 - c e^{x}} - x \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

bzw. $$y(x) = -x \ .$$

c) Für die DGL $$y' = \frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} - 1}$$ machen wir den

Ansatz $u = \frac{y}{x}$, also $y = u \cdot x$ und erhalten

$$y' = u + x u' \ .$$

Eingesetzt in die Ausgangsdgl. ergibt dies

$$u + xu' = \frac{u-2}{u-1} \quad , \text{ also}$$

$$u^2 - 2u + 2 + xu'(u-1) = 0 \quad .$$

Dies ist eine DGL in getrennten Veränderlichen und wir berechnen

$$\int^{u} \frac{\eta - 1}{\eta^2 - 2\eta + 2}\, d\eta = -\int^{x} \frac{1}{\xi}\, d\xi \quad ; \text{ also}$$

mit der Substitution $\tau = \eta - 1$, $d\tau = d\eta$,

$$\int^{u-1} \frac{\tau}{\tau^2 + 1}\, d\tau = -\ln|x| + c_1 \quad ,$$

und daher

$$\left[\frac{1}{2} \ln(\tau^2 + 1)\right]^{u-1} = -\ln|x| + c_1 \quad ,$$

also $\ln((u-1)^2 + 1) = -\ln x^2 + 2c_1$,

also $(u-1)^2 + 1 = \frac{c_2}{x^2}$ mit $c_2 > 0$,

und daher $(ux - x)^2 + x^2 = c_2$,

also $(y-x)^2 + x^2 = c_2$

also $y^2 + 2x^2 - 2xy = c_2$.

3

Wir machen den Ansatz $y(x) = \alpha x + \beta$ und setzen diesen in die Dgl. ein. Wir erhalten

$$\alpha x + \beta \overset{!}{=} x(\alpha + \sin(\alpha)) + \cos(2\alpha) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

also muss

$$\alpha = \alpha + \sin\alpha \qquad (1)$$

sowie

$$\cos 2\alpha = \beta \qquad (2)$$

gelten.

Aus (1) erhalten wir $\alpha = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

und $\beta = \cos(2\alpha) = 1$.

Folglich sind Geraden der Form

$$y(x) = k\pi x + 1 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Lösungen der Dgl.

(4)

a) Es sei $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Weiter sei $\psi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(x) = -\varphi(-x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann ist

$$\psi'(x) = -\varphi'(-x)\cdot(-1)$$

$$= \varphi'(-x).$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} 1 + \frac{\varphi(-x)}{-x}$$

$$= 1 + \frac{\psi(x)}{x}.$$

Also ist ψ Lösung der DGL auf $(-\infty, 0)$.

b) Es sei φ Lösung des AWPs

$$(*) \qquad y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Setzen wir $\psi(x) = -\varphi(-x)$, dann gilt $\psi(0) = 0$

und $\psi'(x) = -\varphi'(-x)(-1) = \varphi'(-x)$

$$\underset{(*)}{=} (-x)^2 + (\varphi(-x))^2$$

$$= x^2 + (-\varphi(-x))^2$$

$$= x^2 + (\psi(x))^2 .$$

Also löst auch ψ das AWP.

Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit des AWPs gilt

somit
$$\varphi(x) = \psi(x) = -\varphi(-x) ,$$

woraus folgt, dass φ eine ungerade Funktion sein muss.

c) Ist φ eine Lösung der Dgl

$$y'' - 2\cos(y') = 1 ,$$

und x_0 eine stationäre Stelle von φ, d.h. $\varphi'(x_0) = 0$, dann ist

$$\varphi''(x_0) - 2\cos(\underbrace{\varphi'(x_0)}_{=0}) = 1 ,$$

also $\varphi''(x_0) = 3 > 0$.

Folglich besitzt φ an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

(5) Gegeben sei das AWP $\quad y' = 2xy + 1 - x^2 \quad , y(0) = 0 ,$

sowie die Iterationsfolge nach Picard mit Startfunktion

$y_0(x) = \frac{1}{2} x$.

a) Gemäß Definition ist

$$y_1(x) = \int_0^x \left(2t \cdot \frac{1}{2} t + 1 - t^2\right) dt$$

$$= \int_0^x 1 \, dt = x ,$$

$$y_2(x) = \int_0^x 2t^2 + 1 - t^2 \, dt$$

$$= \int_0^x 1 + t^2 \, dt = x + \frac{1}{3} x^3 ,$$

$$y_3(x) = \int_0^x 2t\left(t + \frac{1}{3} t^3\right) + 1 - t^2 \, dt$$

$$= \int_0^x 1 + t^2 + \frac{2}{3} t^4 \, dt$$

$$= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} x^5$$

und

$$y_4(x) = \int_0^x 2t\left(t + \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{1 \cdot 3 \cdot 5} t^5\right) + 1 - t^2 \, dt$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5}x^5 + \int_0^x \frac{4}{1\cdot 3\cdot 5} t^6 \, dt$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5}x^5 + \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}x^7 .$$

b) Induktionsanfang: $n = 2$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=2}^{2} \frac{2^0}{1\cdot 3} x^3$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3$$

Damit hat also y_2 die angegebene Form.

Induktionsannahme: Die Behauptung gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 2$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$:

Nach Definition der Iterationsfolge ist

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x 2t\, y_n(t) + 1 - t^2 \, dt$$

$$\underset{(IV)}{=} \int_0^x \left[2t \left(t + \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-2}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)} t^{2k-1} \right) + 1 - t^2 \right] dt$$

$$= \int_0^x 1 + t^2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-1}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)} t^{2k} \, dt$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-1}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k+1)} x^{2k+1}$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2^{k-2}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} x^{2k-1}$$

$$= x + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2^{k-2}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} x^{2k-1} .$$

Damit besitzt die angegebene Formel für $n \geq 2$ Gültigkeit.

c) Wir betrachten die Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m .$$

mit

$$a_m = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } m \text{ gerade} \\ 1 & , \text{ falls } m = 1 \\ \dfrac{2^{\frac{m+1}{2}-2}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m} & , \text{ falls } m \text{ ungerade und } m > 1 . \end{cases}$$

Dann ist $y_n(x)$ gerade die $(2n-1)$-te Partialsumme von dieser Reihe.

Nun gilt

$$0 \leq \limsup_{m \to \infty} \sqrt[m]{a_m} \leq \limsup_{k \to \infty} \sqrt[2k-1]{a_{2k-1}}$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{\frac{2^{k-2}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}}$$

$$\leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{\frac{2^{k-2}}{k!}}$$

$$\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\sqrt[2k-1]{2^{k-2}}}{\sqrt[2k]{k!}} = 0 .$$

Daher gilt für den Konvergenzradius R der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, dass $R = \infty$ ist.

Folglich existiert $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wegen $R = \infty$ ist gliedweise Differentiation der Potenzreihe zugelassen, und wir erhalten

$$y'(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-2}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)} x^{2k-2}$$

$$= 1 + 2x \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-3}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)} x^{2k-3}$$

$$= 1 + 2x \left[\frac{x}{2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k-3}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-3)} x^{2k-3}}_{= y(x) - x} \right]$$

$$= \quad 2xy(x) + 1 - x^2 .$$

Also löst y das Anfangswertproblem.