Höhere Mathematik III

Lösungen zum 13. Übungsblatt

(1) Die Differentialgleichung

$$(*) \quad \mu(x,y)\,\underbrace{\left(4e^{x-y} - e^{2x-2y} - 1\right)}_{=:\,P(x,y)} dx + \mu(x,y)\,\underbrace{\left(2 + 4xe^{x-y}\right)}_{=:\,Q(x,y)} = 0$$

ist exakt, falls $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gilt.

a) Mit dem Ansatz $\mu(x,y) = e^{\alpha x + \beta y}$ erhalten wir:

$$\left(4e^{x-y}e^{\alpha x+\beta y} - e^{2x-2y}e^{\alpha x+\beta y} - e^{\alpha x+\beta y}\right)_y$$

$$\overset{!}{=} \left(2e^{\alpha x+\beta y} + 4xe^{x-y}e^{\alpha x+\beta y}\right)_x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4e^{(\alpha+1)x+(\beta-1)y}(\beta-1) - e^{(\alpha+2)x+(\beta-2)y}(\beta-2)$$

$$- e^{\alpha x+\beta y}\cdot\beta$$

$$\overset{!}{=} 2e^{\alpha x+\beta y}\cdot\alpha + 4e^{(\alpha+1)x+(\beta-1)y}$$

$$+ 4xe^{(\alpha+1)x+(\beta-1)y}(\alpha+1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = 4(\beta-1)\, e^{x-y} - (\beta-2)\, e^{2x-2y} - \beta - 2\alpha - 4\, e^{x-y} - 4x(\alpha+1)\, e^{x-y}$$

$$= (2-\beta)\, e^{2x-2y} + \big(4\beta - 8 - (4\alpha+4)x\big)\, e^{x-y} - \beta - 2\alpha \,.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha = -1 \quad \text{und} \quad \beta = 2 \,.$$

Also ist $\mu(x,y) = e^{2y-x}$ integrierender Faktor.

b) Die Differentialgleichung (*) wird zu

$$\underbrace{\left(4e^{y} - e^{x} - e^{2y-x}\right)}_{=:\, \tilde{P}} dx + \underbrace{\left(2e^{y-x} + 4x\, e^{y}\right)}_{=:\, \tilde{Q}} dy = 0 \,,$$

und ist exakt.

Damit existiert eine Funktion F mit

$$F_x(x,y) = \tilde{P}(x,y) \quad \text{sowie} \quad F_y(x,y) = \tilde{Q}(x,y) \,.$$

Mit $F(x,y) = 4x e^{y} - e^{x} + e^{2y-x}$ liegt solch ein F vor.

Lösungen der Differentialgleichungen sind implizit durch

$$F(x,y) = c$$

gegeben.

Lösung des AWPs: Wegen $y(1) = 1$, muss

$$4e - e + e = C$$

gelten, also $C = 4e$, und die Lösung ist implizit durch

$$4x e^y - e^x + e^{-x} (e^y)^2 = 4e$$

gegeben. Dies ist eine quadratische Gleichung in e^y.

Es ist also

$$e^y = e^x \left(-2x \overset{+}{(-)} \sqrt{4x^2 + 1 + 4e^{1-x}} \right)$$

(der Fall „−" ist ausgeschlossen wegen $e^y > 0$),

und folglich

$$y = \ln \left(e^x \left[-2x + \sqrt{4x^2 + 1 + 4e^{1-x}} \right] \right).$$

(2) Setzt man $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so ist, falls φ umkehrbar ist, $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = y(x)$.

Damit erhält man

$$(*) \quad y'(x) = \dot\psi(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \frac{\dot\psi(\varphi^{-1}(x))}{\dot\varphi(\varphi^{-1}(x))}$$

$$= \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)} \quad \text{mit } t = \varphi^{-1}(x).$$

Die Dgl. $x = (\ln y')^2 + y'$ ist vom Typ $x = g(y')$.

Wählt man $\varphi = g$, also

$$x = (\ln t)^2 + t$$

mit t nahe bei $t_0 = 1$, so ist φ umkehrbar, da $\dot\varphi(t) = \dot g(t) = 2\frac{\ln t}{t} + 1$ nahe bei t_0, bei dem $x_0 = 1$ angenommen wird, von Null verschieden ist.

Aufgrund der Dgl gilt $x = g(y')$ und nach Wahl $x \underset{\text{Ansatz}}{=} \varphi(t) \underset{\text{Wahl}}{=} g(t)$. Also ist $y' = t$.

Aus (*) wird wegen $y' = t$:

$$\dot{\psi}(t) = t \cdot \dot{\varphi}(t) = \left(\frac{2\ln t}{t} + 1\right) \cdot t \,,$$

und damit

$$\psi(t) = 2t\ln t + \frac{1}{2}t^2 - 2t + c \,.$$

Für $t_0 = 1$ muss die Lösung durch $(1, -\frac{1}{2})$ gehen, also $\psi(t_0) = -\frac{1}{2}$ gelten. Daher muss $c = 1$ sein.

Und somit ist

$$y = \psi(t) = 2t\ln t + \frac{t^2}{2} - 2t + 1 \,.$$

(3)

a) Die Dgl ist unabhängig von y. Setzt man $u = y'$, so erhält man die neue Dgl.

$$(u')^2 + xu' - u = 0$$

bzw.

$$(*) \qquad u = xu' + (u')^2 \qquad \text{(Clairautsche Dgl.)}$$

a1) Die Dgl $(*)$ hat bekanntlich Geraden als Lösungen.

Ansatz: $u = \alpha x + \beta$. Eingesetzt in die Dgl erhält man

$$\alpha x + \beta = x\alpha + \alpha^2 .$$

Folglich ergibt sich als Lösung der ursprünglichen Dgl

$$y(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \alpha^2 x + \gamma$$

mit beliebigen $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

a2) Eine weitere Lösung erhält man mit der Methode der Integration durch Differentiation.

Es ist $u = xu' + (u')^2$. Durch Differentiation nach x auf beiden Seiten ergibt sich

$$u' = u' + u''(x + 2u'),$$

also $$u''(x+2u') = 0.$$

Daher gilt $u''=0$ (Fall a1)) oder $u' = -\frac{x}{2}$.

In (*) eingesetzt erhält man

$$u = xu' + (u')^2 = -\frac{x^2}{4}$$

und damit

$$y(x) = -\frac{x^3}{12} + c,$$

als Lösung.

b) Multipliziert man die Dgl $y'' = \frac{1}{2}e^y$ mit y' auf beiden Seiten, so erhält man

$$y'y'' = \frac{1}{2}e^y \cdot y' \quad \text{oder anders ausgedrückt}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(y')^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^y,$$

also die neue Dgl $(y')^2 = e^y + c$.

Wegen $y'(0)=1$ und $y(0)=0$ muss $c=0$ gelten.

Daher ist $(y')^2 = e^y$ bzw. $y' = e^{y/2}$.

Kalkül:
$$\int e^{-y/2}\,dy = \int 1\,dx \quad , \text{ d.h.}$$

$$e^{-\frac{1}{2}y} = -\frac{x}{2} + c \; .$$

Wegen $y(0) = 0$ gilt $c = 1$.

Die Lösung der Ausgangsdgl. ist daher

$$y = -2 \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \ln \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2} \; .$$

④

a) Für die Lösung des AWPs

$$y'' = 2xy' + 4y \;, \quad y(0) = 0 \;, \; y'(0) = 1 \;,$$

gilt

$$y''(0) \underset{\text{Dgl.}}{=} \left(2x\,y'(x) + 4y(x)\right)\Big|_{x=0} = 0 \;,$$

sowie

$$y'''(0) = \left(\frac{d}{dx} y''\right)\Big|_{x=0}$$

$$\underset{\text{Dgl.}}{=} \frac{d}{dx}\left(2x\,y'(x) + 4y(x)\right)\Big|_{x=0}$$

$$= \left(6y'(x) + 2x\,y''\right)\Big|_{x=0}$$

$$= 6 .$$

Per Induktion zeigen wir

$$y^{(k+1)}(x) = 2x\,y^{(k)}(x) + 2(k+1)\,y^{(k-1)}(x) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

(Dies geht, da die Lösung y aufgrund der Dgl. unendlich oft differenzierbar sein muss.).

Induktionsanfang: $k = 1$: $\quad y''(x) = 2x\,y'(x) + 4\,y(x)$, da y Lösung des AWPs.

$k=2$: $\quad y'''(x) = \frac{d}{dx} y''(x) \underset{\text{Dgl.}}{=} \frac{d}{dx}\left(2x\,y'(x) + 4y(x)\right)$

$$= 6y'(x) + 2x\,y''(x).$$

Die Behauptung gelte für ein $k_0 \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt:

$$y^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} y^{(k)}(x)$$

$$\underset{(IV)}{=} \frac{d}{dx}\left(2x\,y^{(k-1)}(x) + 2k\,y^{(k-2)}(x)\right)$$

$$= (2k+2)\,y^{(k-1)}(x) + 2x\,y^{(k)}(x).$$

Daher gilt die Formel.

b) Es ist

$$y^{(k+1)}(0) \underset{a)}{=} 2(k+1)\,y^{(k-1)}(0)$$

$$= 2^2(k+1)(k-1)\cdot y^{(k-3)}(0)$$

$$= \begin{cases} 2\cdot\ldots\cdot \underbrace{y(0)}_{=0} = 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 2^{k/2}(k+1)(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot \underbrace{y'(0)}_{=1} \end{cases}$$

$$\underset{k=2m}{=} 2^m \frac{(2m+1)!}{2m(2m-2)\cdot\ldots\cdot 2} = \frac{(2m+1)!}{m!}, \quad k=2m$$

Also ist

$$y(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{=} \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \, y^{(k+1)}(0) \, x^{k+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \, y^{(2m+1)}(0) \, x^{2m+1}$$

$y^{(k+1)}(0) = 0$

für k ungerade

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \, x^{2m+1} \qquad = x e^{x^2} .$$

Wegen $\quad y'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} \qquad$ und

$$y''(x) = 2xe^{x^2} + 4xe^{x^2} + 4x^3 e^{x^2}$$

$$= 2x\left(e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}\right) + 4xe^{x^2}$$

ist y Lösung der Dgl und wegen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ somit Lösung des AWPs.