Höhere Mathematik III –

Lösungen zum 14. Übungsblatt

(1)

Es sei das AWP

$$2y'' - xy' + 2y = 4 - x\cos x$$

$$y(0) = 0 \,, \quad y'(0) = 1$$

gegeben.

Wir machen den Ansatz $\quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Dann ist $\quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad$ sowie

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Eingesetzt in die Dgl. ergibt dies

$$2y'' - xy' + 2y = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n$$

$$= 4a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n + 2a_n \right) x^n$$

$$\overset{!}{=} 4 - x\cos x$$

$$= 4 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k+1}$$

$$= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad , \text{ wobei}$$

$$b_n = \begin{cases} b_{2k} = 0 & , \text{ für } n = 2k \quad (k = 1, 2, \dots) \\ b_{2k+1} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} & , \text{ für } n = 2k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Damit gilt: (1) $4a_2 + 2a_0 = 4$

(2) $2(n+2)(n+1)\,a_{n+2} + (2-n)\,a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Da $a_0 = y(0) = 0$ , $a_1 = y'(0) = 1$ , ist

$a_2 = 1$ nach (1) und $a_4 = a_6 = \dots = 0$ nach (2),

denn für gerade $n = 2k$ liefert (2)

$$2(2k+2)(2k+1)\,a_{2k+2} + (2-2k)\,a_{2k} = b_{2k} = 0 \quad ,$$

also

$$a_{2k+2} = \frac{k-1}{(2k+2)(2k+1)}\,a_{2k} = \dots \cdot a_4 = 0 \quad ,$$

da $a_4 = 0$ (siehe in (2) $n=2$ ! ).

Für ungerade Indizes erhält man die Rekursion ($n = 2k+1$ in (2)):

$$2 \cdot (2k+3)(2k+2)\, a_{2k+3} + (1-2k)\, a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!},$$

also

$$\begin{cases} a_{2k+3} = \dfrac{\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} + (2k-1)\, a_{2k+1}}{2(2k+3)(2k+2)} & (k = 0, 1, 2, \dots), \\[2ex] a_1 = 1 . \end{cases}$$

Dies liefert $a_3 = -\frac{1}{6}$, $a_5 = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}$; $a_7 = -\frac{1}{7!}$

<u>Vermutung:</u> $a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

<u>Beweis per Induktion:</u>

$k = 0$: $\quad a_1 = y'(0) = 1 = \dfrac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 1)!}$.

$k \to k+1$: $\quad a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3}$

$$\underset{\text{Rekursion}}{=} \frac{\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} + (2k-1)\, a_{2k+1}}{2(2k+3)(2k+2)}$$

$$\underset{(\mathrm{IV})}{=} \frac{\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} + (2k-1)\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}}{2(2k+3)(2k+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left( \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!\,(2k+2)(2k+3)} + \frac{(-1)^{k}(2k-1)}{(2k+1)!\,(2k+2)(2k+3)} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left( \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}(2k+1) - \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{(2k+3)!} \right)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}.$$

Daher gilt: $a_0 = 0$, $a_2 = 1$, $a_4 = a_6 = \ldots = 0$,

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

und somit

$$y(x) = x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= x^2 + \sin x.$$

② a) Mit $u = y$ und $v = y'$ ist $u' = y' = v$

und $v' = y'' \underset{\text{Dgl.}}{=} 2y'(y-1) = 2v(u-1)$.

Weiter gilt $u(0) = y(0) = 0$, sowie $v(0) = y'(0) = 1$.

Somit ist

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 2v(u-1) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Das Iterationsverfahren nach Picard liefert für

$n=0$:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} v_0(t) \\ 2v_0(t)\,(u_0(t)-1) \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} x \\ 1-2x \end{pmatrix},$$

für $n=1$:

$$\begin{pmatrix} u_2(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} v_1(t) \\ 2v_1(t)\,(u_1(t)-1) \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1-2t \\ (2-4t)(t-1) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} x - x^2 \\ -\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \end{pmatrix},$$

und für $n=2$:

$$\begin{pmatrix} u_3(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x^4 + x^3 - x^2 + x \\ \frac{4}{9}x^6 - \frac{26}{15}x^5 + \frac{13}{6}x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \end{pmatrix}$$

c) Die Dgl. läßt sich umschreiben zu

$$y'' = 2yy' - 2y' = \frac{d}{dx}\left(y^2 - 2y\right).$$

Daher gilt $y' = y^2 - 2y + c$. Wegen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ist $c = 1$, also

$$y' = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 .$$

Somit erhalten wir für $y \neq 1$

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx ,$$

also $\dfrac{1}{y-1} = -x + c$ bzw. $y = 1 + \dfrac{1}{c-x}$.

Wegen $y(0) = 0$ ist $c = -1$.

Wir erhalten

$$y = 1 - \frac{1}{1+x} \underset{|x|<1}{=} 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

$$= x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots ,$$ somit

$$y' = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots .$$

Man sieht: Die ersten Approximationen $u_0, u_1, u_2$ sind Partialsummen der Reihe für $y$, analog $v_0, v_1$ für $y'$.
Ab $n = 3$ sind weder $u_n$ noch $v_n$ Partialsummen für obige Reihen (Konvergieren nach dem Satz von Picard-Lindelöf aber dennoch gegen $y$ bzw. $y'$).

3

Zur Lösung der Dgl $\quad y'' - \frac{2}{x(1-x^2)}\, y = 0 \quad (x \in (0,1))$

machen wir für die allgemeine Lösung $y$ den Ansatz

$y(x) = v(x) \cdot y_1(x)$ mit der speziellen Lösung

$y_1(x) = \frac{x}{1-x}$.

Wir erhalten
$$y' = v' y_1 + v y_1' \quad \text{und}$$
$$y'' = v'' y_1 + 2 v' y_1' + v y_1''.$$

In die Dgl. eingesetzt ergibt dies:

$$
\begin{aligned}
0 &= y'' - \frac{2}{x(1-x)^2}\, y \\
&= v'' y_1 + 2 v' y_1' + v y_1'' - \frac{2}{x(1-x)^2}\, v y_1 \\
&= y_1 v'' + 2 y_1' v' + \underbrace{\left( y_1'' - \frac{2}{x(1-x)^2}\, y_1 \right)}_{=0,\ \text{da } y_1 \text{ Lösung}} \cdot v \\
&= y_1 v'' + 2 y_1' v' \\
&= y_1 w' + 2 y_1' w \qquad (\text{mit } w = v') \\
&= \frac{x}{1-x}\, w' + \frac{2}{(1-x)^2}\, w
\end{aligned}
$$

also die separierende Dgl

$$w' = \frac{2}{x(x-1)} \cdot w$$

für $w$.

Wir erhalten somit

$$w(x) = \exp\left( \int \frac{2}{x(x-1)}\, dx \right)$$

$$= \exp\left( \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}\, dx \right)$$

$$= \exp\left( 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \ln|x| + a \right)$$

$$= C \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = w(x) = v'(x) \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Also ist

$$v'(x) = C\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = C \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

und somit

$$v(x) = C\left(x - 2\ln|x| - \frac{1}{x}\right) + D \qquad (C, D \in \mathbb{R})$$

und folglich

$$y(x) = v(x) \cdot \frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{Cx}{1-x}\left( \frac{x^2-1}{x} - \ln(x^2)\right) + D\,\frac{x}{1-x}$$

$$= C_1 \left( x+1 + \frac{x}{1-x} \ln|x^2| \right) + C_2 \frac{x}{1-x}$$

mit $C_1 = -C$, $C_2 = D \in \mathbb{R}$.

4

a) Gegeben sei die Dgl. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-2x}}$.

Die zugehörige homogene Dgl lautet $y'' - 3y' + 2y = 0$,

so dass der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ auf die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

führt, die durch $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ gelöst wird.

Lösungen der hom. Dgl. sind also von der Form

$$y_{hom}(x) = C_1 \cdot \underbrace{e^x}_{=:y_1} + C_2 \underbrace{e^{2x}}_{=:y_2} .$$

Um zu einer Lösung der inhomogenen Dgl zu gelangen, verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten

$$y_p(x) = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{2x} .$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 ,$$
$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = r(x) ,$$

wobei $r(x)$ die rechte Seite der Dgl ist.

Wir erhalten

$$C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0 ,$$
$$C_1' e^x + 2 C_2' e^{2x} = \frac{1}{1+e^{-2x}}$$

mit den Lösungen

$$C_1'(x) = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} , \quad C_2'(x) = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} .$$

Daher ist $C_2(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(1+e^{-2x}\right) = \ln \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$

und $C_1(x) = \int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}\, dx \underset{t=e^{-x}}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \int \frac{dt}{1+t^2}$

$$-e^{-x} = \frac{dt}{dx} .$$

$$= \arctan t \underset{t=e^{-x}}{=} \arctan e^{-x} ,$$

Folglich ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. gegeben durch

$$y_p(x) = \arctan\left(e^{-x}\right) e^x + \ln \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}\, e^{2x} ,$$

und die allgemeine Lösung durch

$$y(x) = y_p(x) + y_{hom}(x) .$$

b) Gegeben sei die Dgl. $y'' + y = \tan^2(x)$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Die Lösung der zugehörigen hom. Gleichung ist gegeben durch

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Variation der Konstanten, $y_p(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$, führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1' \cos x &+ C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x &+ C_2' \cos x = \tan^2 x \end{aligned}$$

Die Lösungen hiervon sind

$$C_1'(x) = -\sin(x) \tan^2(x) \quad , \quad C_2'(x) = \cos(x) \cdot \tan^2(x).$$

Wir erhalten

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx \underset{\substack{\cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt}}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \int \frac{1-t^2}{t^2}\, dt$$

$$= -\frac{1}{t} - t \underset{t=\cos x}{=} -\frac{1}{\cos x} - \cos x \, ,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos x} - \cos x \; dx$$

$$= -\sin x + \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) .$$

Daher ist eine spezielle Lösung gegeben durch

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) \cos x$$

$$+ \left(-\sin x + \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) \sin x$$

$$= -1 - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cdot \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= \sin x \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2 .$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2 ,$$