Höhere Mathematik III

Lösungen zur 1. Übungsklausur

(1)

a) Es ist $z^2 + |z|^2 = f(z) = f(x+iy)$

$= x^2 - y^2 + i2xy + x^2 + y^2$

$= \underbrace{2x^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$.

Weiter gilt $u_x(x,y) = 4x$, $u_y(x,y) = 0$,

$v_x(x,y) = 2y$, $v_y(x,y) = 2x$.

Überprüfung, wo die CRD erfüllt sind:

1. $u_x(x,y) = v_y(x,y)$: $4x = 2x \Rightarrow x = 0$

2. $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$: $0 = -2y \Rightarrow y = 0$.

Also ist f nur in $z = 0$ komplex differenzierbar, und folglich nirgends holomorph.

b) $$g(x+iy) = \frac{\cos(2xy) - \sin(2xy)}{e^{x^2-y^2}}$$

$$= \frac{1}{e^{x^2-y^2}\left(\cos(2xy) + i\sin(2xy)\right)}$$

$$= \frac{1}{e^{x^2-y^2} \cdot e^{i2xy}}$$

$$= \frac{1}{e^{x^2-y^2+2ixy}} \underset{z=x+iy}{=} \frac{1}{e^{z^2}} = e^{-z^2}$$

$$= g(z).$$

Die Funktion g ist daher auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

c) Es gilt für $z \neq \pm i$:

$$e^{\frac{1}{z+i}} = i\, e^{\frac{1}{z-i}}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{z+i}} \cdot e^{-\frac{1}{z-i}} = i$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}} = i$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{(z-i)-(z+i)}{z^2+1}} = i$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{\frac{-2i}{z^2+1}} = i$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{-2i}{z^2+1} = \log(i)$$

$$\Longleftrightarrow \quad -2i = (z^2+1)\left(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{-2i}{\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i} = z^2+1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{-4}{\pi+4k\pi} - 1 = z^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{-\frac{4}{\pi+4k\pi} - 1} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

② Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$, und $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$v(x,y) = e^x \sin(\lambda y) + 2xy + 6x \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

a)

Da der $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, ist v Imaginärteil einer holomorphen Funktion, falls $\Delta v = 0$ gilt.

Wir bestimmen daher zunächst die partiellen Ableitungen:

$$v_x(x,y) = e^x \sin(\lambda y) + 2y + 6$$
$$v_{xx}(x,y) = e^x \sin(\lambda y)$$
$$v_y(x,y) = \lambda e^x \cos(\lambda y) + 2x$$
$$v_{yy}(x,y) = -\lambda^2 e^x \sin(\lambda y).$$

Also gilt

$$(\Delta v)(x,y) = v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = (1-\lambda^2)\, e^x \sin(\lambda y).$$

Folglich gilt $\Delta v = 0$ genau dann, wenn $\lambda \in \{-1, 1, 0\}$.

b) Für $\lambda = 1$ ist nach Teil a) $v(x,y) = e^x \sin(y) + 2xy + 6x$ Imaginärteil einer holomorphen Funktion $f = u + iv$.

Zur Bestimmung von u verwenden wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

(1) $u_x = v_y$, also $u_x(x,y) = e^x \cos(y) + 2x$, und

(2) $-u_y = v_x$, also $u_y(x,y) = -e^x \sin(y) - 2y - 6$.

Aus (1) ergibt sich durch Integration nach x für die Funktion u

(*) $u(x,y) = e^x \cos(y) + x^2 + c(y)$.

Und Differentiation von (*) nach y ergibt

$$u_y(x,y) = -e^x \sin(y) + \frac{d}{dy} c(y).$$

Der Vergleich mit (2) ergibt somit

$$\frac{d}{dy} c(y) = -2y - 6,$$

also $c(y) = -y^2 - 6y + c$.

Also ist $u(x,y) = e^x \cos(y) + x^2 - y^2 - 6y + c$.

Die gesuchten Funktionen f sind also von der Form

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$
$$= e^x \cos(y) + x^2 - y^2 - 6y + c \quad + i(e^x \sin(y) + 2xy + 6x)$$

c) $f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) + x^2 + i\,2xy - y^2$
$$+ 6i(x+iy) \quad + c$$
$$= e^{x+iy} + (x+iy)^2 + 6i(x+iy) + c$$
$$= e^z + z^2 + 6iz + c$$

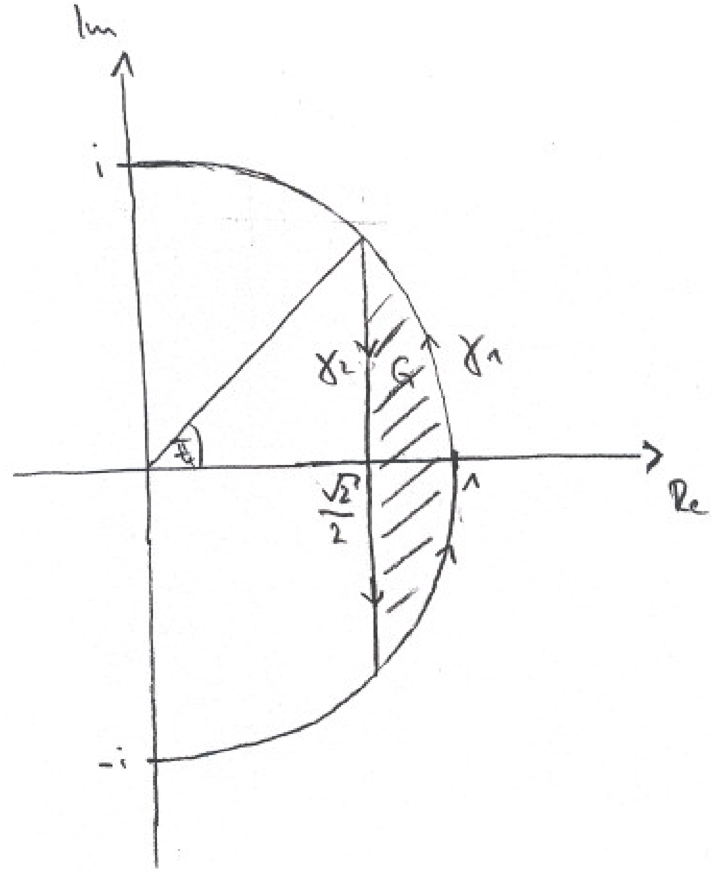
③

a) $G = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 , z + \bar{z} > \sqrt{2} \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 , 2 \operatorname{Re}(z) > \sqrt{2} \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \} \wedge \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \frac{\sqrt{2}}{2} \}$

Skizze:



b) Parametrisierung von ∂G:

Von γ_1: $\gamma_1(t) := e^{it} \quad (t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}])$

Von γ_2: $\gamma_2(t) := \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i(1-t)) \quad (t \in [0,2])$

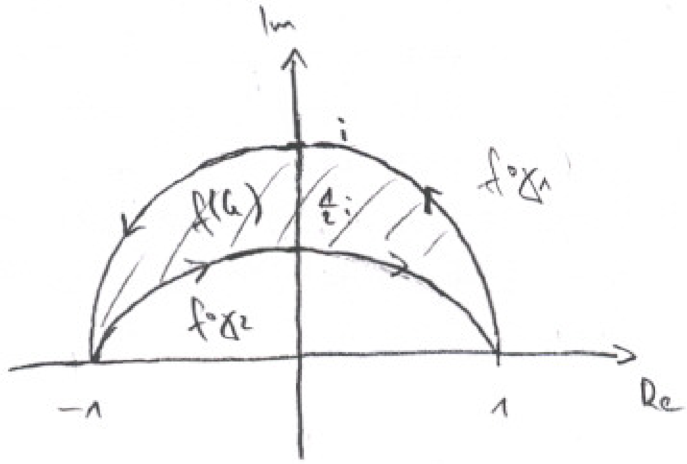
c) Wir bestimmen das Bild von G unter f. Da f die rechte Halbebene schlicht abbildet, geht Rand auf Rand über, und die Orientierung bleibt erhalten.

$$f(\gamma_1(t)) = i\, e^{2it} = e^{2it + \frac{\pi}{2} i} \qquad \left(t \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right]\right)$$

$$\begin{aligned} f(\gamma_2(t)) &= i \tfrac{1}{2} \left(1 + i(1-t)\right)^2 \\ &= \tfrac{i}{2} \left(1 + 2i(1-t) + i^2 (1-t)^2\right) \\ &= \underbrace{-(1-t)}_{=: x(t)} + i \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(1 - (1-t)^2\right)}_{=: y(t)} \qquad (t \in [0,2]) \end{aligned}$$

Dann gilt $\quad y = \frac{1}{2}(1 - x^2) \quad$ mit $x \in [-1,1]$.

Skizze:



d) Für den Flächeninhalt von $f(G)$ gilt also

$$I(f(G)) = \frac{\pi}{2} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1-x^2)\, dx$$

$\uparrow$

halber Flächeninhalt

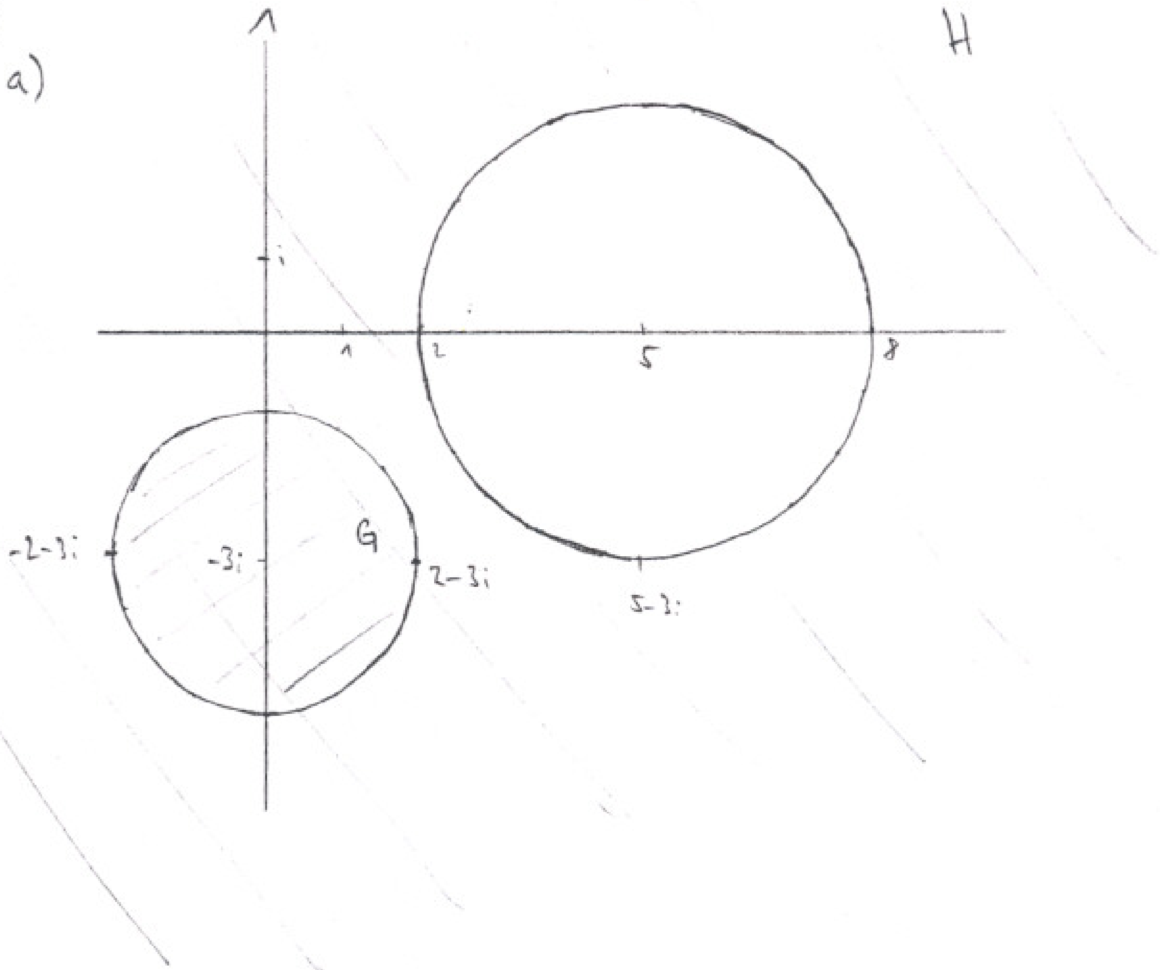
der Einheitskreisscheibe

$$= \frac{\pi}{2} - \int_{0}^{1} 1-x^2\, dx = \frac{\pi}{2} - \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$$

7)

a)



b) Bekanntlich läßt sich jede Möbiustransformation als Komposition von Translationen, Drehstreckungen und Inversionen schreiben. Daher ergibt sich die gesuchte Möbiustransformation durch Komposition der folgenden Abbildungen:

$w_1(z) = z + 3i$, $w_2(z) = \frac{1}{2} z$,

$w_3(z) = \frac{1}{z}$, $w_4(z) = 3z$

$w_5(z) = z + 5$.

Dabei werden die geometrischen Eigenschaften der angegebenen Funktionen, wie Kreistreue und Ränderzuordnung, ausgenutzt.

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
T(z) &= (w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1)(z) \\
&= w_5 \circ w_4 \circ w_3 \left(\frac{z+3i}{2} \right) \\
&= w_5 \circ w_4 \left(\frac{2}{z+3i} \right) = w_5 \left(\frac{6}{z+3i} \right) \\
&= \frac{6}{z+3i} + 5 = \frac{6}{z+3i} + \frac{5(z+3i)}{(z+3i)} \\
&= \frac{5z + 6 + 15i}{z+3i}.
\end{aligned}
$$

Aus der Konstruktion folgt, dass $T(2-3i) = 8$, $T(-i) = 5-3i$ und $T(-2-3i) = 2$ gilt.

c) Die zu T gehörende Matrix ist $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 6+15i \\ 1 & 3i \end{pmatrix}}_{=: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$.

Deren Inverse ist gegeben durch

$$
A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{15i - (6+15i)} \begin{pmatrix} 3i & -6-15i \\ -1 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3i & 6+15i \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.
$$

Daher ist T^{-1} gegeben durch $T^{-1}(z) = \dfrac{-3iz + 6 + 15i}{z - 5}$.

ist $T(-1) = \frac{-5+6+15i}{3i-1} = \frac{(1+15i)(3i+1)}{-9-1}$

$= -\frac{1+18i-45}{10} = \frac{22}{5} - \frac{9}{5}i$,

$T(0) = \frac{6+15i}{3i} = 5-2i$,

$T(i) = \frac{20i+6}{4i} = 5-\frac{3}{2}i$,

$T(\infty) = 5$.

<u>Skizze:</u>