WS 2006/2007

Höhere Mathematik III

Lösungen zur 2. Übungsklausur

①

a) Es sei $f(z) = \dfrac{\sinh(z) - z}{z^3}$ $\quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$.

Wegen $\dfrac{\sinh(z) - z}{z^3} = \dfrac{\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) - z}{z^3}$

(*)

$$= \frac{\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{z^3} = \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \dots$$

ist f in $z_0 = 0$ holomorph fortsetzbar.

Damit folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{|z|=1} \frac{\sinh(z) - z}{z^3}\, dz = 0.$$

(<u>Alternative Lösungsmöglichkeit:</u>

f besitzt nur in $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität.

Nach dem Residuensatz gilt folgendes

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;0).$$

Aufgrund der Laurententwicklung in (*) gilt $\operatorname{Res}(f;0) = 0$,

also $\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0$.)

b) Es sei $f(z) = (z-1)^{41} e^{\frac{1}{1-z}}$.

f besitzt nur in $z = 1$ eine isolierte Singularität,

und diese liegt in dem durch $|z|=3$ begrenzten, einfach zusammenhängenden Gebiet.

Mit dem Residuensatz erhält man daher

$$\int_{|z|=3} (z-1)^{41} e^{\frac{1}{1-z}}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;1).$$

Zur Bestimmung des Residuums entwickeln wir f in eine Laurentreihe um den Punkt $z = 1$.

Es ist
$$f(z) = (z-1)^{41} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{1-z}\right)^k$$

$$= (z-1)^{41} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{(z-1)^k}$$

$$= (z-1)^{41} - (z-1)^{40} + \dots - \frac{1}{41!}$$
$$+ \frac{1}{42!} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1}{43!} \frac{1}{(z-1)^2} + \dots ,$$

und somit $\operatorname{Res}(f; 1) = \frac{1}{42!}$, woraus man

$$\int_{|z|=3} (z-1)^{41} e^{\frac{1}{1-z}} \, dz = \frac{2\pi i}{42!}$$ erhält.

c) Es sei $f(z) = \dfrac{z^2}{\cos(z^2) - 1}$

Die Singularitäten von f sind die Nullstellen der Funktion $z \mapsto \cos(z^2) - 1$.

Es gilt

$$\cos(z^2) - 1 = 0 \iff \cos(z^2) = 1$$
$$\iff e^{iz^2} + e^{-iz^2} = 2$$

$$\iff \quad e^{2iz^2} - 2e^{iz^2} + 1 = 0$$

$$\iff \quad (e^{iz^2} - 1)^2 = 0$$

$$\iff \quad e^{iz^2} = 1$$

$$\iff \quad z^2 = 2k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \quad z = \pm\sqrt{2\pi}\sqrt{k} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z_0^2) - 1 = 0$ gilt also insbesondere

$$|z_0| = \sqrt{2\pi}\sqrt{|k|} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z},$$

also für $k \neq 0$

$$|z_0| = \sqrt{2\pi}\sqrt{|k|} \geq \sqrt{2\pi} > \sqrt{4} = 2.$$

Daher liegt nur die Singularität $z_0 = 0$ in dem durch $|z| = 2$ begrenzten, einfach zusammenhängenden Gebiet.

Mittels des Residuensatzes erhält man

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{\cos(z^2) - 1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0).$$

Zur Bestimmung des Residuums: Es ist $f(z) = \dfrac{z^2}{\cos(z^2) - 1}$

$$= \frac{z^2}{\left(1 - \frac{(z^2)^2}{2!} + \frac{(z^2)^4}{4!} - \frac{(z^2)^6}{6!} + \dots\right) - 1}$$

$$= \frac{z^2}{-\frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \ldots}$$

$$= \frac{1}{z^2\left(-\frac{1}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^8}{6!} + \ldots\right)}$$

$$= \frac{g(z)}{z^2}$$

mit einer in einer Umgebung von 0 holomorphen Funktion g, für die $g(0) = -2$ gilt.

Da zusätzlich noch $g(z) = g(-z)$ gilt, folgt, dass in der Taylorentwicklung von g nur gerade Potenzen auftreten; und daher ist $\mathrm{Res}(f; 0) = 0$.

(Alternative Möglichkeit zur Bestimmung von $\mathrm{Res}(f; 0)$:

Es ist in einer Umgebung von 0

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} \quad \text{mit} \quad g(z) = \frac{1}{-\frac{1}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^8}{6!} + \ldots}$$

Wegen $g(0) = -2$ besitzt f an der Stelle 0 einen Pol der Ordnung 2.

Somit ist

$$\operatorname{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!}\left(z^2 \cdot f(z)\right)'$$

$$= \lim_{z\to 0} \left(g(z)\right)'$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{0 - 1\cdot\left(\frac{4z^3}{4!} - \frac{8z^7}{6!} + \ldots\right)}{\left(-\frac{1}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^8}{6!} + \ldots\right)^2}$$

$$= \frac{0}{\left(-\frac{1}{2!}\right)^2} = 0.$$

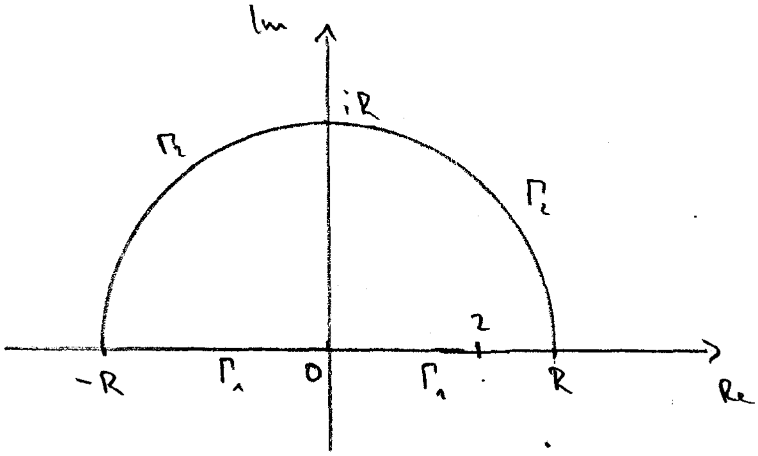
Es ergibt sich also

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{\cos(z^2) - 1}\, dz = 0.$$

(2)

Es sei $R > 2$, $\Gamma_1 = [-R, R]$,
$\Gamma_2 = \{ R \cdot e^{it} : t \in [0, \pi] \}$ und $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

a)



b) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung $|v+w| \geq \big| |v| - |w| \big|$ für $v, w \in \mathbb{C}$ erhält man für $z \in \Gamma_2$:

$$(*) \quad |z \pm i| \geq \big| |z| - |\pm i| \big|$$

$$\underset{z \in \Gamma_2}{=} |R - 1| = R - 1 \underset{R>2}{\geq} R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

Damit gilt für $z \in \Gamma_2$:

$$|f(z)| = \frac{|z^2 - 3z + 2|}{|z^4 + 2z^2 + 1|} = \frac{|z^2 - 3z + 2|}{|(z-i)^2 (z+i)^2|}$$

$$\leq \frac{|z|^2 + 3|z| + 2}{|z-i|^2 \, |z+i|^2}$$

$$\underset{R>2}{\overset{(*)}{\le}} \quad \frac{6R^2}{\frac{1}{4}R^2 \cdot \frac{1}{4}R^2} = \frac{6\cdot 16}{R^2} = \frac{96}{R^2} .$$

c) Der Weg $\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = R\cdot e^{it}$

ist eine Parametrisierung von Γ_2.

Damit gilt

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \right| \le \max_{z\in\Gamma_2} |f(z)| \quad L(\gamma_2) ,$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge des Weges γ bezeichnet.

Damit und mit b) gilt

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \right| \le \frac{96}{R^2}\cdot \pi \cdot R = \frac{96\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .$$

Folglich ist $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$.

d) Da der Nenner von f keine reelle Nullstelle besitzt, ist f auf $\mathbb{R}$ stetig; und nach dem Majorantenkriterium existiert das angegebene uneigentliche Integral.

Die Funktion f besitzt wegen

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

in $\mathbb{C}$ die möglichen Singularitäten i und $-i$, wobei nur $z_0 = i$ im durch Γ eingeschlossenen Gebiet liegt. Mittels des Residuensatzes erhält man also

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;i).$$

Da in $z_0 = i$ ein Pol der Ordnung 2 vorliegt, läßt sich das Residuum folgendermaßen bestimmen:

$$\operatorname{Res}(f;i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^2 f(z)\right)'$$

$$= \lim_{z\to i}\left(\frac{(z-1)(z-2)}{(z+i)^2}\right)'$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{(2z-3)(z+i)^2 - 2(z+i)(z-1)(z-2)}{(z+i)^4}$$

$$= \frac{(2i-3)(-4) - 4i(i-1)(i-2)}{16}$$

$$= \frac{-8i + 12 - 4i(-1 - 3i + 2)}{16}$$

$$= \frac{-12i}{16} = -\frac{3}{4}i \; .$$

Und damit ergibt sich

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{3}{4}i\right) = \frac{3}{2}\pi \; ,$$

also

$$\frac{3}{2}\pi = \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\,dz$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \right)$$

$$\overset{c)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx \; .$$

3

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = (1+y)\cosh x \quad , \quad y(0) = 5 \, ,$$

sowie die Iterationsfolge nach Picard mit der Startfunktion $y_0(x) = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Gemäß Definition erhalten wir

$$y_1(x) = 5 + \int_0^x (1 + y_0(t)) \cosh t \, dt$$

$$= 5 + 6 \int_0^x \cosh t \, dt$$

$$= 5 + 6 \left[\sinh t \right]_0^x = 5 + 6 \sinh x \, ,$$

sowie

$$y_2(x) = 5 + \int_0^x (1 + y_1(t)) \cosh t \, dt$$

$$= 5 + \int_0^x 6 \cosh t + 6 \cdot \sinh t \cosh t \, dt$$

$$= 5 + 6 \int_0^x \cosh t \, dt + 6 \int_0^x \sinh t \cosh t \, dt$$

$$= 5 + 6 \left[\sinh \right]_0^x + 6 \left[\tfrac{1}{2} (\sinh t)^2 \right]_0^x$$

$$= 6 \left[1 + \sinh x + \frac{1}{2!} (\sinh x)^2 \right] - 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) <u>Induktionsanfang:</u> Für $n=0$ gilt

$$y_0(x) = 5 = 6\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}(\sinh x)^k}_{=1}\Big) - 1 .$$

Ebenso gilt für $n=1$ gemäß a)

$$y_1(x) = 5 + 6\sinh x = 6\big(1 + \sinh x\big) - 1 .$$

Also ist die Formel für $n=0$, sowie für $n=1$ richtig.

(Der Fall $n=1$ wurde nur deswegen betrachtet, falls Sie $n=0$ nicht zu den natürlichen Zahlen zählen sollten.)

<u>Induktionsschritt:</u> $n \to n+1$. Es gelte die Behauptung für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Dann ist gemäß Definition der Iterationsfolge

$$y_{n_0+1}(x) = 5 + \int_0^x \big(1 + y_{n_0}(t)\big)\cosh t \, dt$$

$$= 5 + \int_0^x \Big(1 - 1 + 6\cdot\sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!}(\sinh t)^k\Big)\cosh t \, dt$$

$$= 5 + 6\int_0^x \sum_{k=0}^{n_0} \underbrace{\frac{1}{k!}(\sinh t)^k\cdot\cosh t}_{=\left[\frac{1}{k+1}(\sinh t)^{k+1}\right]'} \, dt$$

$$= 5 + 6\Big[\sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{(k+1)!}(\sinh t)^{k+1}\Big]_0^x$$

$$= 5 + 6 \sum_{k=1}^{n_0+1} \frac{1}{k!} (\sinh x)^k$$

$$= 6 \left(\sum_{k=0}^{n_0+1} \frac{1}{k!} (\sinh x)^k \right) - 1 .$$

c) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, so ist I in einem abgeschlossenen Intervall $J = [-a, a]$ mit $a > 0$ enthalten.

Aufgrund der Monotonie und Symmetrie der Funktion $x \mapsto \sinh x$ gilt

$$|\sinh x| \leq \sinh a \quad \text{für alle } x \in I.$$

(Alternativ: $\overline{I}$ ist kompakt und die Funktion $x \mapsto |\sinh x|$ stetig auf $\overline{I}$, also dort beschränkt durch ihr Maximum.)

Damit gilt für $x \in I$

$$|y_n(x)| = \left| 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (\sinh x)^k - 1 \right|$$

$$\leq 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{|\sinh x|^k}_{\leq C} + 1$$

und damit konvergiert die Folge (y_n) nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig, da die Exponentialreihe auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig konvergiert.

Damit erhält man

$$y(x) = 6\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\sinh x)^k\right) - 1$$

$$= 6\, e^{\sinh x} - 1.$$

als explizite Darstellung von $y(x)$.

Und damit ergibt sich

$$y'(x) = 6 \cosh x \, e^{\sinh x} = (\underbrace{1 + 6\, e^{\sinh x} - 1}_{(1+y(x))}) \cosh x.$$

(4)

Gegeben sei die Differentialgleichung

(*) $$\underbrace{2xy(2y^3+3x^2)}_{=:\,P(x,y)}\,dx + \underbrace{3x^2(2y^3+x^2)}_{=:\,Q(x,y)}\,dy = 0$$

a) Es gilt

$$P_y(x,y) = 16xy^3 + 6x^3$$

sowie

$$Q_x(x,y) = 12xy^3 + 12x^3,$$

also $P_y \neq Q_x$. Folglich ist die Differentialgleichung (*) nicht exakt.

b)

Mit $\mu(x,y) = x^\alpha y^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\mu(x,y)\,P(x,y) = 2x^{\alpha+1}y^{\alpha+1}(2y^3+3x^2), \quad \text{sowie}$$

$$\mu(x,y)\,Q(x,y) = 3x^{\alpha+2}y^\alpha(2y^3+x^2).$$

Damit ergibt sich

$$(\mu(x,y)\,P(x,y))_y = 2x^{\alpha+1}(\alpha+1)y^\alpha(2y^3+3x^2)$$
$$+\,2x^{\alpha+1}y^{\alpha+1}(6y^2),$$

Sowie

$$(\mu(x,y)\,Q(x,y))_x = 3(\alpha+2)\,x^{\alpha+1}y^{\alpha}(2y^3+x^2)$$
$$+\ 3x^{\alpha+2}y^{\alpha}(2x).$$

Damit die Differentialgleichung

$$(\ast\ast)\qquad \mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0$$

exakt ist, muss

$$(\square)\qquad (\mu(x,y)\,P(x,y))_y = (\mu(x,y)\,Q(x,y))_x$$

gelten. Multiplikation mit $\frac{1}{x^{\alpha}y^{\alpha}}$ auf beiden Seiten von $(\square)$ ergibt:

$$2x(\alpha+1)(2y^3+3x^2) + 2xy\,6y^2$$
$$\stackrel{!}{=} 3(\alpha+2)\,x\,(2y^3+x^2) + 3x^2\cdot 2x\ ,\quad \text{also}$$

$$12xy^3 - 6x^3 \stackrel{!}{=} x\left[3(\alpha+2)(2y^3+x^2) - 2(\alpha+1)(2y^3+3x^2)\right]$$

und somit

$$12xy^3 - 6x^3 = x\left[2\alpha y^3 - 3\alpha x^2 + 8y^3\right].$$

Daher muss $\alpha = 2$ gelten.

c) Gesucht ist eine Funktion $F(x,y)$, so dass

$$F_x(x,y) = \mu(x,y)\, P(x,y)$$ sowie

$$F_y(x,y) = \mu(x,y)\, Q(x,y)$$ gilt

(mit $\mu(x,y) = x^2 y^2$).

Es ist $\mu(x,y)\, P(x,y) = 4x^3y^6 + 6x^5y^3$

und Integration nach x liefert

$$F(x,y) = x^4y^6 + x^6 \cdot y^3 + \Phi(y) .$$

Damit ergibt sich

$$F_y(x,y) = 6x^4y^5 + 3x^6y^2 + \Phi'(y)$$

$$\overset{!}{=} \mu(x,y)\, Q(x,y)$$

$$= 6x^4y^5 + 3x^6y^2 .$$

Also $\Phi'(y) = 0$, also $\Phi(y) = c$.

Damit ist die allgemeine Lösung der Dgl (*) mittels

$$x^4y^6 + x^6y^3 = C$$

in impliziter Form gegeben.