Höhere Mathematik II

SS 2007

Lösungen zum 1. Übungsblatt

(1) a) Die zur Dgl. $y' = 2y + 1 + x^2$ gehörende homogene Gleichung lautet $y' = 2y$. Mittels Trennung der Veränderlichen

$$\frac{y'}{y} = 2 \quad \rightsquigarrow \quad \ln|y| = 2x + \tilde{c}$$

erhalten wir $y(x) = C \cdot e^{2x} \qquad (C \in \mathbb{R})$

als Lösung der homogenen Gleichung.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 .$$

Gehen wir mit diesem in die Dgl. ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} A_1 + 2A_2 x &= 2(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) + 1 + x^2 \\ &= 2A_0 + 1 + 2A_1 x + (2A_2 + 1)x^2 \end{aligned}$$

und der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} A_1 &= 2A_0 + 1 , \\ 2A_2 &= 2A_1 , \\ 0 &= 2A_2 + 1 . \end{aligned}$$

Daher folgt: $A_2 = -\frac{1}{2}$, $A_1 = A_2 = -\frac{1}{2}$, $A_0 = \frac{1}{2}(A_1 - 1) = -\frac{3}{4}$,

also $y_p(x) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$. (Probe!)

Die allgemeine Lösung der Dgl. lautet somit

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{4}(3 + 2x + 2x^2) \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

b) Wir betrachten die beiden Gleichungen

$$y' = 2y + 1 + x^2 \quad \text{und} \quad y' = 2y + e^x .$$

Gemäß a) ist eine Lösung der ersten durch $y_{P_1}(x) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2$ gegeben.

Für die Lösung der zweiten machen wir den Ansatz $y_{P_2}(x) = Ae^x$. Setzt man diesen in die Dgl. ein, so erhält man

$$Ae^x = 2Ae^x + e^x \quad , \text{ also}$$

$$-Ae^x = e^x \quad \text{und somit} \quad A = -1.$$

Wie man sieht, ist $y_{P_2}(x) = -e^x$ Lösung der zweiten Gleichung.

Nach dem Superpositionsprinzip ist demnach die allgemeine Lösung der Dgl

$$y' = 2y + 1 + x^2 + e^x$$

gegeben durch

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - e^x .$$

c) Die homogene Dgl. $y' = 3y$ besitzt die allgemeine Lösung

$$y(x) = C \cdot e^{3x} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}$$

(Trennung der Veränderlichen).

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung der Dgl. $y' = 3y + e^{2x}$ machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\, e^{2x} .$$

In die Dgl. eingesetzt ergibt dies

$$2Ae^{2x} = 3Ae^{2x} + e^{2x} = (3A+1)\,e^{2x} .$$

Koeffizientenvergleich ergibt: $2A = 3A + 1$, also $A = -1$,

und daher $y_p(x) = -e^{2x}$ (Probe!).

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. lautet somit

$$y(x) = Ce^{3x} - e^{2x} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

d) Wir spalten die Dgl. $y' = -2y + x + \sin x$ auf in die Dgln

$$y' = -2y + x \quad \text{und} \quad y' = -2y + \sin x .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet $y(x) = Ce^{-2x}$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Für die Lösung der ersten Gleichung machen wir den Ansatz $y_{p_1}(x) = A_0 + A_1 x$. Eingesetzt in die Dgl. ergibt dies die Gleichung

$$A_1 = -2(A_0 + A_1 x) + x = -2A_0 + (1-2A_1)x.$$

Somit erhalten wir die Bedingungen

$$1 - 2A_1 = 0 \quad \text{sowie} \quad A_1 = -2A_0,$$

also $A_1 = \frac{1}{2}$ und $A_0 = -\frac{1}{4}$, und somit

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x \quad \text{(Probe!)}$$

Für die zweite Gleichung setzen wir an $y_{p_2}(x) = A \sin x + B \cos x$, setzen dies in die Gleichung $y' = -2y + \sin x$ ein, und erhalten

$$A \cos x - B \sin x = -2A \sin x - 2B \cos x + \sin x,$$

und somit die Bedingungen

$$A = -2B \quad \text{und} \quad -B = -2A + 1,$$

also $-B = 4B + 1$, und daher $B = -\frac{1}{5}$, sowie $A = \frac{2}{5}$.

Daher ist $y_{p_2}(x) = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$ (Probe!), und die allgemeine Lösung der Ausgangs-dgl. lautet

$$y(x) = C \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$$

nach dem Superpositionsprinzip.

e) Es ist $y(x) = Ce^{-x}$ allgemeine Lösung der Dgl $y' = -y$,

$y_{P_1}(x) = 1$ Lösung der Dgl. $y' = -y + 1$, und

zur Lösung der Dgl. $y' = -y + xe^{-x}$ machen wir den

Ansatz $y_{P_2}(x) = x(A_0 + A_1 x)e^{-x} = A_0 x e^{-x} + A_1 x^2 e^{-x}$

Einsetzen in die Dgl. ergibt

$$A_0 e^{-x} - \underline{A_0 x e^{-x}} + A_1 2x e^{-x} - \underline{A_1 x^2 e^{-x}}$$

$$= \underline{-A_0 x e^{-x}} - \underline{A_1 x^2 e^{-x}} + xe^{-x},$$

also $A_0 e^{-x} + (2A_1 - 1) x e^{-x} = 0$,

und somit $A_0 = 0$, $A_1 = \frac{1}{2}$ und

$$y_{P_2}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \quad \text{(Probe!)}.$$

Die allgemeine Lösung der Dgl. $y' = -y + xe^{-x} + 1$ lautet daher

$$y(x) = Ce^{-x} + 1 + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}.$$

<u>Bemerkung:</u> Ansätze zur Lösung spezieller inhomogener linearer Dglen. 1. Ordnung siehe Fachliteratur.
Variation der Konstanten liefert jeweils dasselbe Ergebnis, ist aber eventuell aufwendiger.

(2)

Wir betrachten zunächst die Bernoullische Dgl.

$$y' + xy + \frac{1}{2}(xy)^3 = 0.$$

Setzt man $z = y^{1-3} = \frac{1}{y^2}$, so erhält man

$$z' = -\frac{2}{y^3} \cdot y' \overset{(*)}{=} -\frac{2}{y^3}\left(-xy - \frac{1}{2}x^3y^3\right)$$

$$= \frac{2x}{y^2} + x^3 = 2xz + x^3,$$

also die Dgl. $\quad z' = 2xz + x^3 \qquad (**).$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ermitteln wir mittels Trennung der Veränderlichen:

$$z' = 2xy \quad \rightsquigarrow \quad \frac{z'}{z} = 2x \quad \rightsquigarrow \quad \ln|z| = x^2 + \tilde{c}$$

und erhalten $\quad z(x) = c\, e^{x^2} \quad$ mit $\quad c \in \mathbb{R}.$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung (**) benutzen wir den Ansatz der Variation der Konstanten.

Es sei $\quad z(x) = C(x) \cdot e^{x^2}.$

Dann ist $\quad z'(x) = C'(x)\, e^{x^2} + C(x)\, e^{x^2} \cdot 2x.$

In die Gleichung (**) eingesetzt ergibt dies

$$C'(x)\, e^{x^2} + C(x)\, e^{x^2} \cdot 2x - 2x\, z(x) = x^3,$$

also $\quad C'(x)\, e^{x^2} = x^2.$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$C(x) = \int^x e^{-t^2} t^3 \, dt = \left(-\tfrac{1}{2}\right) \int^x \underbrace{\left(e^{-t^2} 2t \cdot (-1)\right)}_{= v'} \underbrace{t^2}_{u} \, dt$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right) \left[e^{-x^2} x^2 - \int^x e^{-t^2} \cdot 2t \, dt \right]$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right) \left[e^{-x^2} x^2 + e^{-x^2} \right]$$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right) e^{-x^2} \left(x^2 + 1 \right) .$$

Also ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl in (**) gegeben durch

$$z_p(x) = \left(-\tfrac{1}{2}\right) \left(x^2 + 1\right) \qquad \text{(Probe!)}$$

und somit die allgemeine durch

$$z(x) = C e^{x^2} - \tfrac{1}{2} \left(x^2 + 1\right) . \qquad (***)$$

Bei der Transformation $z = \frac{1}{y^2}$ geht die Anfangsbedingung $y(0) = \sqrt{2}$ über in $z(0) = \frac{1}{2}$.

Die Lösung des AWP $z' = 2xz + x^3$, $z(0) = \frac{1}{2}$, erhält man durch Bestimmung von C in (***):

$$\tfrac{1}{2} \overset{!}{=} C - \tfrac{1}{2} , \quad \text{also } C = 1 .$$

Und somit ergibt sich

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)}}$$

als Lösung des ursprünglichen AWPs.

Da für $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1) =$

$$\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots\right) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots > 0$$

ist y auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und dort Lösung (man mache die Probe!).

③ Es sei $y \in C^2(I)$, $f \in C(I)$ und y löse die Dgl. $Ly = f$.
Aufgrund der Linearität des Operators $L: C^2(I) \to C(I)$
gilt dann:

$$L(\mathrm{Re}\,y) + i\,L(\mathrm{Im}\,y) = L(\mathrm{Re}\,y + i\,\mathrm{Im}\,y) = Ly = f$$
$= \mathrm{Re}\,f + i\,\mathrm{Im}\,f$, also insbesondere für jedes $x \in I$

$$\underbrace{L(\mathrm{Re}\,y)(x)}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{L(\mathrm{Im}\,y)(x)}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{(\mathrm{Re}\,f)(x)}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{(\mathrm{Im}\,f)(x)}_{\in\mathbb{R}}$$

da $$L\big(\substack{\mathrm{Re}\,y\\ \mathrm{Im}\,y}\big)(x) = \underbrace{\big(\substack{\mathrm{Re}\,y\\ \mathrm{Im}\,y}\big)''(x)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{2a}_{\in\mathbb{R}}\,\underbrace{\big(\substack{\mathrm{Re}\,y\\ \mathrm{Im}\,y}\big)'(x)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{b}_{\in\mathbb{R}}\,\underbrace{\big(\substack{\mathrm{Re}\,y\\ \mathrm{Im}\,y}\big)(x)}_{\in\mathbb{R}}.$$

Daher ist punktweise
$$L(\mathrm{Re}\,y)(x) = (\mathrm{Re}\,f)(x) \quad \text{sowie}$$
$$L(\mathrm{Im}\,y)(x) = (\mathrm{Im}\,f)(x),$$
und damit sind die Gleichungen
$$L(\mathrm{Re}\,y) = \mathrm{Re}\,f \quad \text{und} \quad L(\mathrm{Im}\,y) = \mathrm{Im}\,f$$
bewiesen.

④

Wir zeigen zunächst:

Ist $y: I \to \mathbb{R}$ Lösung der Dgl. $Ly = 0$, so gilt

a) $y \in C^\infty(I)$.

b) y besitzt die Taylorentwicklung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \qquad (x \in I).$$

c) Ist $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, so ist $y = 0$.

Beweis:

zu a): Wir zeigen per Induktion, dass

(*) $y^{(n+2)} = -2a\, y^{(n+1)} - 2b\, y^{(n)}$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann ist offensichtlich $y \in C^\infty(I)$.

IA: $n=0$. Nach Voraussetzung ist $Ly = 0$, also $y'' + 2ay' + by = 0$. Also gilt die Behauptung für $n=0$.

IV: Die Behauptung gilt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

IS: $n \to n+1$.

Nach Voraussetzung ist nun $y \in C^{(n+2)}(I)$, und es gilt

$$y^{(n+2)}(x) = -2a \underbrace{y^{(n+1)}(x)}_{\in C^1(I)} - b \underbrace{y^{(n)}(x)}_{\in C^2(I)}.$$

Also ist $y^{(n+2)} \in C^1(I)$, und wir erhalten

$$y^{((n+1)+2)} = y^{(n+2+1)} = -2a\, y^{(n+2)} - b\, y^{(n+1)},$$

also die Beh.

zu c): Es sei $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Aus der Gleichung (*) folgt insbesondere

(**) $$y^{(n+2)}(x_0) = -2a\, y^{(n+1)}(x_0) - b\, y^{(n)}(x_0) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Also ist $0 = y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = \ldots$,

also $y^{(k)}(x_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und mit b)

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}}_{=0} (x-x_0)^k = 0 \qquad (x \in I),$$

also $y = 0$.

zu b) Es seien $c, d \in \mathbb{R}$, $c<d$, $J = [c,d] \subseteq I$, $x_0 \in J$.
Da gemäß a) $y \in C^\infty(J)$ ist, gilt nach dem Satz von Taylor

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \overbrace{\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}^{R_n(x)}$$

für alle $x \in J$, wobei $\xi \in J$ von x abhängt.
Wenn man nun zeigen kann, dass das Restglied $R_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen 0 geht, so ist die behauptete Entwickelbarkeit zunächst für jedes $x \in J$ wegen

$$\left| y(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = |R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

bewiesen.

Dazu sei $M \geq 0$ mit der Eigenschaft

$|y(t)| \leq M \quad (t \in J)$ und

$|y'(t)| \leq M \quad (t \in J)$.

Ferner sei $A := \max\{|a|, |b|, \frac{1}{3}\}$

Koeffizienten in der Dgl. $Ly = 0$.

Wir beweisen nun induktiv die Abschätzung

$$|y^{(n)}(t)| \leq (3A)^n M \qquad (t \in J, n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

IA: $$|y''(t)| = |-2a y'(t) - b y(t)| \leq 2AM + AM = 3AM \underset{\text{wg. } 3A \geq 1}{\leq} (3A)^2 M$$

$|y'(t)| \leq M \leq 3AM$ nach Vor.

IS: $$|y^{(n+2)}(t)| \underset{(*)}{=} |-2a\, y^{(n+1)}(t) - b\, y^{(n)}(t)|$$
$$\leq 2A\, |y^{(n+1)}(t)| + A\, |y^{(n)}(t)|$$
$$\underset{(IV)}{\leq} 2A\, (3A)^{n+1} M + A\, (3A)^n M$$
$$\leq (3A)^{n+2} M.$$

Somit gilt nun für das Restglied $R_n(x)$ in J (mit $\xi \in J$)

$$|R_n(x)| = \left| \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$
$$\leq \frac{3A^{n+1} M (d-c)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Da $J = [c,d] \subseteq I$ beliebig war, ist die Taylorentwicklung in ganz I gültig.

Nun zurück zur Aufgabenstellung:

a) Wir zeigen: Das Anfangswertproblem $Ly = f$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ist eindeutig lösbar.

Zunächst zur <u>Eindeutigkeit</u>:

Es seien u_1, u_2 Lösungen des AWPs. Dann gilt
$Lu_1 = f = Lu_2$, sowie $u_1(x_0) = y_1 = u_2(x_0)$ und
$u_1'(x_0) = y_1 = u_2'(x_0)$.

Setzt man $u = u_1 - u_2$, so löst $u : I \to \mathbb{C}$ das AWP
$Lu = Lu_1 - Lu_2 = 0$, $u(x_0) = u_1(x_0) - u_2(x_0) = 0$,
$u'(x_0) = u_1'(x_0) - u_2'(x_0) = 0$

Mit Hilfe von Aufgabe 3 erhält man, dass
$\operatorname{Re} u : I \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} u : I \to \mathbb{R}$ ebenfalls
die Dgl. $Ly = 0$ lösen.

Aufgrund der Anfangsbedingungen $u(x_0) = \operatorname{Re} u(x_0) + i \operatorname{Im} u(x_0) = 0$
und $u'(x_0) = \operatorname{Re} u'(x_0) + i \operatorname{Im} u'(x_0)$
$= (\operatorname{Re} u)'(x_0) + i(\operatorname{Im} u)'(x_0) = 0$,
gilt $(\operatorname{Re} u)(x_0) = 0$, $(\operatorname{Re} u)'(x_0) = 0$, sowie
$(\operatorname{Im} u)(x_0) = 0$, $(\operatorname{Im} u)'(x_0) = 0$.

Somit gilt nach dem anfangs Gezeigten $\operatorname{Re} u = 0 = \operatorname{Im} u$,
also $u = 0$.

Nun zur Lösbarkeit:

Gemäß Vorlesung (unterscheide 3 Fälle) existieren zur
Dgl. $Ly = f$ linear unabhängige Lösungen $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$
der homogenen Gleichung $Ly = 0$, sowie eine spezielle

Lösung $y_p : I \to \mathbb{C}$ der inhomogenen Gleichung $Ly = f$ (im Falle einer komplexwertigen rechten Seite $f : I \to \mathbb{C}$, verwende man Aufgabe 3, um dies zu sehen).

Die Lösungsgesamtheit ist dann durch

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + u_p(x)$$

gegeben, und die Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_1 u_1(x_0) + C_2 u_2(x_0) &= y_0 - u_p(x_0) \\ C_1 u_1'(x_0) + C_2 u_2'(x_0) &= y_1 - u_p'(x_0) \end{aligned},$$

das, wie man zeigen kann, aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Funktionen u_1 und u_2 eindeutig lösbar ist.

D.h. mit den daraus gewonnenen Koeffizienten C_1 und C_2 ist

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + u_p(x) \qquad (x \in I)$$

die eindeutige Lösung des AWPs $Ly = f$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

b) Es sei $\mathcal{L}_0 = \{ y \in C^2(I) : Ly = 0 \}$ die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung.

Gemäß a) existieren eindeutige Lösungen der Anfangswertprobleme

$Ly = 0$, $y(x_0) = 1$, $y'(x_0) = 0$ und

$Ly = 0$, $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1$.

Diese seien mit u_1 und u_2 bezeichnet.

Offensichtlich ist dann

$$\{ p u_1 + q u_2 : p, q \in \mathbb{C} \} \subseteq \mathcal{L}_0 .$$

Weiter gilt: Ist $y \in \mathcal{L}_0$ mit $y(x_0) = \underbrace{y_0}_{\in \mathbb{C}}$, $y'(x_0) = \underbrace{y_1}_{\in \mathbb{C}}$,
so läßt sich y schreiben als

$$y = y_0 \cdot u_1 + y_1 \cdot u_2 ,$$

denn beide Seiten erfüllen die Dgl. $Ly = 0$ und die Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0 = y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 = y_0 \cdot u_1(x_0) + y_1 \cdot u_2(x_0)$$
$$y'(x_0) = y_1 = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 = y_0 \cdot u_1'(x_0) + y_1 \cdot u_2'(x_0) ,$$

und gemäß a) ist dieses AWP eindeutig lösbar.

Also ist $\mathcal{L}_0 \subseteq \{ pu_1 + qu_2 : p, q \in \mathbb{C} \}$, und somit

$$\dim \mathcal{L}_0 = \dim \{ pu_1 + qu_2 : p, q \in \mathbb{C} \} = 2 .$$

(5) Zur Lösung der Dgl. $Ly = f$ machen wir den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, und betrachten zunächst die homogene Gleichung $Ly = 0$.

Setzt man den Ansatz in die homogene Gleichung ein, so erhält man

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 2a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0,$$

also die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

1. $a^2 - b > 0$: Dann sind $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ Lösungen der homogenen Gleichung.

2. $a^2 - b = 0$: Dann sind die Funktionen $y_1(x) = e^{-ax}$ und $y_2(x) = x \cdot e^{-ax}$ Lösungen der homogenen Gleichung

3. $a^2 - b < 0$: Die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sind die komplexwertigen Lösungen der homogenen Gleichung, aus denen sich die in der Vorlesung angegebenen reellwertigen Lösungen kombinieren lassen.

<u>Variation der Konstanten:</u> Zur Ermittlung einer speziellen Lösung der Dgl. $Ly = f$ mache man den Ansatz

$$(*) \quad y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x),$$

wobei y_1, y_2 linear unabhängige Lösungen der homogenen Lösung seien und C_1, C_2 stetig differenzierbare Funktionen.

Für diese ermittelt man zunächst die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' &= f, \end{aligned}$$

und erhält, wie man beweisen kann, aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Lösungen y_1, y_2 stetige Funktionen

$$C_1' = C_1'(x) \quad \text{und} \quad C_2' = C_2'(x)$$

und mittels Integration die gesuchten Funktionen $C_1 = C_1(x)$ und $C_2 = C_2(x)$.

Die Darstellung (*) liefert dann eine partikuläre Lösung der Gleichung $Ly = f$.

⑥ Wir bestimmen zunächst eine Lösung der homogenen Gleichung

$y'' + 4y' = 0$ mittels des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$.

Dieser führt zu

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + 4\lambda) = 0.$$

Da das (charakteristische) Polynom $\lambda^2 + 4\lambda$ die Nullstellen -4 und 0 besitzt, erhalten wir (Probe!) die Lösungen

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1$$

sowie $$y_2(x) = e^{-4x}.$$

Nun zur Bestimmung einer partikulären Lösung:

a) Setzt man den Ansatz $y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$ in die Gleichung ein, so erhält man

$$y_p''(x) + 4y_p'(x) = (-4A + 8B)\cos 2x + (-8A - 4B)\sin 2x \stackrel{!}{=} \cos 2x$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhält man die Bedingungen

$$-4A + 8B = 1 \quad \text{und}$$
$$-8A - 4B = 0,$$

und daher $-20A = 1$, also $A = -\frac{1}{20}$

und $B = \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

Somit erhalten wir als spezielle Lösung

$$y_p(x) = -\frac{1}{20}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet damit

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{20}\cos 2x$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b) Zur Bestimmung einer partikulären Lösung mittels der Variation der Konstanten benötigen wir das Gleichungssystem

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$$
$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = \cos 2x \quad ,$$

also

$$C_1' + C_2' e^{-4x} = 0$$
$$-4 C_2' e^{-4x} = \cos 2x \quad .$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet

$$C_2'(x) = -\frac{1}{4} e^{4x} \cos 2x \quad \text{und}$$
$$C_1'(x) = \frac{1}{4} \cos 2x \quad .$$

Mittels Integration erhalten wir

$$C_1(x) = \frac{1}{8} \sin 2x$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{4} \int^x e^{4t} \cos 2t \, dt \underset{(*)}{=} -\frac{1}{4} \frac{4\cos 2x + 2\sin 2x}{20} e^{4x} .$$

Damit ist

$$y_p(x) = C_1(x) \, y_1(x) + C_2(x) \, y_2(x)$$
$$= -\frac{1}{20} \cos 2x + \sin 2x \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{40} \right)$$
$$= -\frac{1}{20} \cos 2x + \frac{1}{10} \sin 2x$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Zu (*): Es ist $\int^x e^{at} \cos bt \, dt = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \left(a \cos bx + b \sin bx \right)$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $a^2+b^2 \neq 0$, sonst ist nämlich die rechte Seite nicht definiert.

Für den Fall $b = 0$ ist

$$\int^x e^{at}\, dt = \frac{1}{a} e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^2+0^2} \cdot (a \cdot 1 + 0).$$

Es sei nun also $b \neq 0$. Dann erhalten wir mittels partieller Integration

$$\underline{\int^x \underbrace{e^{at}}_{u} \underbrace{\cos bt}_{v'}\, dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{part.} \\ \text{Int}}}{=} \left[e^{at} \frac{1}{b} \sin bt \right]^x - \int^x \underbrace{a e^{at}}_{u} \underbrace{\frac{1}{b} \sin bt\, dt}_{v'}$$

$$\underset{\substack{\text{part.} \\ \text{Int}}}{=} e^{ax} \frac{1}{b} \sin bx - \left(\left[-a e^{at} \frac{1}{b^2} \cos bt \right]^x + \int^x a^2 e^{at} \frac{1}{b^2} \cos bt\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \underline{\int^x \frac{a^2}{b^2} e^{at} \cos bt\, dt}.$$

Daraus ergibt sich

$$\left(\int^x e^{at} \cos bt\, dt \right) \underbrace{\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)}_{= \frac{a^2+b^2}{b^2}} = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx \; ,$$

woraus man die Behauptung abliest.

Bemerkung: Spezielle Ansätze für die partikuläre Lösung siehe Fachliteratur, Ansatz der Variation der Konstanten geht immer (mit eventuellen Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Funktionen $C_1(x)$ und $C_2(x)$).