Höhere Mathematik II

Lösungen zum 2. Übungsblatt

(1) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b]$, $f : I \to \mathbb{C}$ und $f_n : I \to \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ integrierbare Funktion, und es gelte $f_n \underset{\substack{\text{glm.} \\ \text{auf } I}}{\longrightarrow} f$.

Behauptung: (f_n) konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, d.h. $\| f_n - f \|_2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$.

Da (f_n) glm. gegen f konvergiert, existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$| f_n(x) - f(x) | \leq \sqrt{\frac{2\pi}{b-a}} \cdot \varepsilon \qquad (x \in I, \; n \geq N_0).$$

Damit erhalten wir (da mit integrierbaren Funktionen f und g auch die Funktionen $f-g$, $|f|$ und $|f|^2$ integrierbar sind) für alle $n \geq N_0$:

$$\| f_n - f \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \underbrace{| f_n(x) - f(x) |}_{\leq \sqrt{\frac{2\pi}{b-a}} \cdot \varepsilon}{}^2 \, dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{2\pi}{b-a} \varepsilon^2 \, dx = \varepsilon^2 ,$$

also $\| f_n - f \|_2 \leq \varepsilon$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt demnach die Behauptung.

(2) Es sei $a, p \in \mathbb{R}$, $p>0$, $f: I \to \mathbb{C}$ sei p-periodisch und über jedem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ integrierbar.

Wir zeigen zunächst: $$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx. \qquad (*)$$

<u>Beweis:</u> Aufgrund der Periodizität der Funktion f gilt $f(x) = f(x-p)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und wir erhalten zunächst

$$\int_p^{a+p} f(x)\,dx = \int_p^{a+p} f(x-p)\,dx \overset{\text{Subst.}}{\underset{t=x-p}{=}} \int_0^a f(t)\,dt$$
$$= \int_0^a f(x)\,dx.$$

Addition von $\int_a^p f(x)\,dx$ auf beiden Seiten liefert aufgrund der über jedem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegebenen Integrierbarkeit und den Rechenregeln für (Riemann-) Integrale:

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^{a+p} f(x)\,dx$$
$$= \int_a^p f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$
$$= \int_0^p f(x)\,dx.$$

Wir zeigen nun: $$\int_{a-p/2}^{a+p/2} f(x)\,dx = \int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,dx.$$

<u>Beweis:</u> Wir ersetzen in der Gleichung $(*)$ zunächst a durch $a - \frac{p}{2}$ (dies ist zulässig, da wir Gleichung $(*)$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ gezeigt haben) und erhalten

$$\int_{a-\frac{p}{2}}^{a+\frac{p}{2}} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx. \qquad (**)$$

Setzen wir in (*) speziell $a = -\frac{p}{2}$ so erhalten wir wegen (**)

$$\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx = \int_{a-\frac{p}{2}}^{a+\frac{p}{2}} f(x)\,dx ,$$

also die Behauptung.

③ a) Aufgrund der Beziehungen

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k})$$
$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

für $k = 1, \dots, N$, sind die Aussagen ii) und iii) äquivalent.
Die Aussage i) folgt offensichtlich aus iii).
Bleibt also noch die Implikation i) $\Rightarrow$ iii).

Es sei $T_N = 0$.

<u>Annahme:</u> Es existiert ein $k_0 \in \{-N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}$ mit $c_{k_0} \neq 0$.

Dann führt die Rechnung

$$0 = \langle 0, e_{k_0} \rangle = \langle T_N, e_{k_0} \rangle$$
$$= \langle \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k, e_{k_0} \rangle = \sum_{k=-N}^{N} c_k \underbrace{\langle e_k, e_{k_0} \rangle}_{= \delta_{k,k_0}}$$
$$= c_{k_0} \neq 0$$

zu einem Widerspruch.

Somit folgt iii) aus i), und die Äquivalenz ist gezeigt.

b) Es seien $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N, \lambda_{N+1}, \dots, \lambda_{2N} \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$S_N := \lambda_0 \underbrace{\varphi_0}_{=1} + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_N \varphi_N + \lambda_{N+1} \psi_1 + \dots + \lambda_{2N} \psi_N$$
$$= 0, \quad \text{d.h.} \quad S_N(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Da S_N ein trigonometrisches Polynom ist, folgt $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{2N} = 0$ aus a).

Also sind die Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N, \psi_1, \dots, \psi_N$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängig.

c) „$\Leftarrow$" klar

„$\Rightarrow$" Ist T_N gerade, so gilt $T_N(x) = T_N(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Setzt man

$$\begin{aligned} S_N(x) &= T_N(x) - T_N(-x) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kx) \\ &= 0 \qquad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

so ist S_N ein auf $\mathbb{R}$ verschwindendes trigonometrisches Polynom. Also gilt nach a) $b_1 = b_2 = \dots = b_N = 0$.

d) „$\Leftarrow$" klar

„$\Rightarrow$" Da T_N ungerade ist, gilt $T_N(x) = -T_N(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Setzt man $$\begin{aligned} R_N(x) &= T_N(x) + T_N(-x) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{N} 2 a_k \cos(kx) \\ &= 0 \qquad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

so verschwindet R_N auf $\mathbb{R}$, und a) liefert die Behauptung.

e) ii) $\Rightarrow$ iii): $c_0 = \frac{a_0}{2} \underset{a_0 \in \mathbb{R}}{=} \overline{\left(\frac{a_0}{2}\right)} = \overline{c_0}$

und $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \underset{a_k, b_k \in \mathbb{R}}{=} \overline{\frac{1}{2}(a_k + ib_k)} = \overline{c_{-k}}$.

iii) $\Rightarrow$ ii) : $a_0 = 2c_0 \underset{c_0=\overline{c_0}}{=} \overline{2c_0} = \overline{a_0}$, also $a_0 \in \mathbb{R}$,

$$a_k = c_k + c_{-k} \underset{c_k = \overline{c_{-k}}}{=} \overline{c_{-k}} + c_{-k} = 2 \operatorname{Re} c_{-k} \in \mathbb{R},$$

und

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{i}(\bar{c}_{-k} - c_k)$$

$$\underset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{i}(c_{-k} - \overline{c_{-k}}) = \frac{1}{i} 2i \operatorname{Im} c_{-k}$$

$$= 2 \operatorname{Im} c_{-k} \in \mathbb{R}.$$

ii) $\Rightarrow$ i) : ✓

i) $\Rightarrow$ ii) : Wegen $T_N(x) \in \mathbb{R}$ ist auch $\overline{T_N(x)} = T_N(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Damit ist $S_N(x) = T_N(x) - \overline{T_N}(x)$

$$= \underbrace{\left(\frac{a_0}{2} - \overline{\left(\frac{a_0}{2}\right)}\right)}_{\in \mathbb{C}} + \sum_{k=1}^{N} \overbrace{\left(a_k - \overline{a_k}\right)}^{\in \mathbb{C}} \cos(kx)$$

$$+ \underbrace{\left(b_k - \overline{b_k}\right)}_{\in \mathbb{C}} \sin(kx)$$

$$= 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Da S_N ein trigonometrisches Polynom ist, das auf ganz $\mathbb{R}$ verschwindet, folgt aus a)

$$\frac{a_0}{2} - \overline{\left(\frac{a_0}{2}\right)} = 0 , \quad \text{sowie}$$

$$a_k - \overline{a_k} = 0 = b_k - \overline{b_k} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

und damit die Behauptung.

④ Es seien $f, g \in V$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: 1) $\|g\|_2 = 0$

2) $\|g\|_2 > 0$

Fall 1: Gilt $\|g\|_2 = 0$, so ist $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx = 0$.

Da mit $g \in V$ auch $|g| \in V$ und $|g|^2 \in V$ gilt, ist die Funktion $|g|^2$ bis auf höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen $x_1, \dots, x_n \in [-\pi, \pi]$ stetig in $[-\pi, \pi]$.

Wir unterscheiden nun wieder zwei Fälle:

Fall A: $|g(x)|^2 = 0 \quad (x \in [-\pi,\pi] \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$.

Dann ist $g(x) = 0$ und damit auch

$f(x) \cdot \overline{g(x)} = 0 \quad (x \in [-\pi,\pi] \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$.

Daraus folgt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx = 0,$$

also $|\langle f, g\rangle| = 0 \le \underbrace{\|f\|_2}_{\ge 0} \cdot \underbrace{\|g\|_2}_{\ge 0}$.

Fall B: Es existiert ein $x_0 \in [-\pi,\pi] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $|g(x_0)|^2 > 0$.

Da $|g|^2$ in x_0 stetig ist, existiert ein $c > 0$ und ein $\delta > 0$ mit

$$|g(x)|^2 \ge c \quad (x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta])$$

Dann ist aber

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \, dx \geq \frac{c}{2\pi}\cdot 2\delta > 0 ,$$

was $\|g\|_2 = 0$ widerspricht.

Wir haben somit gezeigt, dass die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung unter der Voraussetzung $\|g\|_2 = 0$ gültig ist.

<u>Fall 2:</u> Es gelte $\|g\|_2 > 0$.

Wir setzen $\alpha = \langle f, g\rangle$ und $\lambda = -\frac{\alpha}{\langle g,g\rangle} = -\frac{\alpha}{\|g\|_2^2}$.

Die Funktion $f + \lambda g$ ist offensichtlich aus V, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle f+\lambda g, f+\lambda g\rangle \\
&= \langle f,f\rangle + \bar{\lambda}\langle f,g\rangle + \lambda\langle g,f\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle g,g\rangle \\
&= \langle f,f\rangle - \frac{\bar{\alpha}}{\langle g,g\rangle}\alpha - \frac{\alpha}{\langle g,g\rangle}\bar{\alpha} + \frac{\alpha\bar{\alpha}}{\langle g,g\rangle^2}\langle g,g\rangle \\
&= \langle f,f\rangle - \frac{|\alpha|^2}{\langle g,g\rangle} .
\end{aligned}$$

Dies liefert
$$\begin{aligned}
|\langle f,g\rangle|^2 &\leq \langle f,f\rangle\cdot\langle g,g\rangle \\
&= \|f\|_2^2 \cdot \|g\|_2^2 ,
\end{aligned}$$

und daher die Behauptung.

(5)

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \qquad (x \in [0, 2\pi))$$

und $f(x + 2\pi) = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Mit dieser Definition gilt für $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)$:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x - 2k\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} + k - \frac{x}{2\pi}.$$

Beweis: Benutze stückweise Linearität von f.

a) Bestimmung der Fourierkoeffizienten von f:

$k = 0$: $c_0 = \langle f, e_0 \rangle = \langle f, 1 \rangle$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx \underset{f \text{ ungerade}}{=} 0$$

$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$c_k = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

$$\underset{\text{Aufg. 2}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) e^{-ikx} \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{-ik}\right) e^{-ikx} \right]_0^{2\pi} - \left(\frac{1}{-ik}\right)\left(-\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2\pi}{2\pi}\right)\left(\frac{1}{-ik}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-ik}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{ik} = -\frac{i}{2k\pi}.$$

Damit ist $$(\mathcal{F}f)(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\left(-\frac{i}{2k\pi}\right)e^{ikx}$$

b) 1. Mit $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, ist

$$H(x-a) - H(x-b) = \begin{cases} 0, & x<a \\ 1, & a\leq x<b \\ 0, & x\geq b \end{cases}$$

Beweis: Fallunterscheidung!

2. Für $k\in\mathbb{Z}$ sei

$$g_k(x) := \left(\frac{1}{2}+k-\frac{x}{2\pi}\right)\left(H(x-2k\pi) - H(x-2(k+1)\pi)\right).$$

Dann ist

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}+k-\frac{x}{2\pi} = f(x), & x\in[2k\pi, 2(k+1)\pi) \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Insbesondere ist $g_k(x) = 0$ für alle $x\in[2m\pi, 2(m+1)\pi)$ mit $m\in\mathbb{Z}$, $m\neq k$.

Es sei nun $x\in\mathbb{R}$. Dann existiert genau ein $k\in\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $x\in[2k\pi, 2(k+1)\pi)$.
Damit gilt $g_k(x) = f(x)$ und $g_m(x) = 0$ ($m\in\mathbb{Z}$, $m\neq k$), und wir erhalten

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N} g_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x),$$

Daher gilt punktweise (sogar lokal gleichmäßig)

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi} \right) \left[H(x - 2k\pi) - H(x - 2(k+1)\pi) \right]$$

$(x \in \mathbb{R})$.

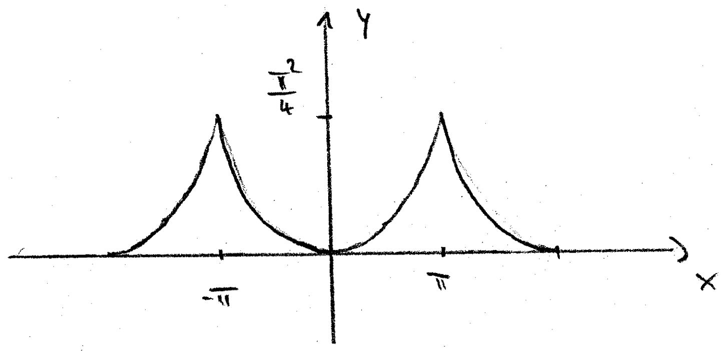
(6) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi)$$

und

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Skizze:



a) Da f eine gerade Funktion ist, ist $\mathcal{F}f$ eine reine Cosinusreihe, d.h. $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}x^2 \cdot 1 \, dx \underset{\text{gerade}}{\overset{f}{=}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4}x^2 \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$k \in \mathbb{N}$: $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}x^2 \cos(kx) \, dx \underset{\text{gerade}}{\overset{f}{=}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4}x^2 \cos(kx) \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[x^2 \frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2}{k} x \sin(kx) \, dx \right)$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi} x \sin(kx) \, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\left(\left[x \left(-\frac{1}{k}\right)\cos(kx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{k}\cos(kx) \, dx \right)$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\left(-\frac{\pi}{k}(-1)^k + \frac{1}{k^2}\left[\sin kx\right]_0^\pi\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Damit erhalten wir $\quad (\mathcal{F}f)(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt)$

b) Es sei die Differentialgleichung $\quad y'' + 2y' + 2y = f \quad$ gegeben.

1) Lösung der homogenen Gleichung $\quad y'' + 2y' + 2y = 0.$

Wähle den Ansatz $\quad y(x) = e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Eingesetzt in die Dgl. liefert dies

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)\, e^{\lambda x} = 0,$$

also $\quad \lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$.

Damit sind alle Lösungen der homogenen Gleichung gegeben via

$$y_h(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$ sind.

2) Lösung der inhomogenen Gleichung:

Da die Funktion f stetig und stückweise glatt auf $\mathbb{R}$ ist, wird f durch die Fourierreihe $\mathcal{F}f$ dargestellt.

D.h. man löse die Dgl.

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$

$(x \in \mathbb{R})$.

Aufgrund der Struktur der Inhomogenität liegt es nahe, das Superpositionsprinzip zu benutzen und den folgenden Ansatz zu wählen:

$$y_p(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$$

(Superposition von $\cos(kt)$ - Termen)

(Man beachte hierbei, dass dieser Ansatz voraussetzt, dass die sowohl die Reihe als auch die formal abgeleiteten Reihen gleichmäßig konvergieren, da dann das Vertauschen von Summation und Differentiation zulässig ist.)

Wir erhalten (zunächst nur formal):

$$y_p'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -k\,\alpha_k \sin(kx) + k\beta_k \cos(kx)$$

$$y_p''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 \alpha_k \cos(kx) - k^2 \beta_k \sin(kx).$$

Eingesetzt in die Dgl. ergibt sich

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx) \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} -k^2\alpha_k \cos(kx) - k^2\beta_k \sin(kx)$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} -k\alpha_k \sin(kx) + k\beta_k \cos(kx)$$

$$+ \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$$

$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2\alpha_k + 2k\beta_k + 2\alpha_k)\cos(kx)$$

$$+ (-k^2\beta_k - 2k\alpha_k + 2\beta_k)\sin(kx)$$

Koeffizientenvergleich ergibt $\alpha_0 = \frac{\pi^2}{12}$ sowie

i) $(2-k^2)\,\alpha_k + 2k\,\beta_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$ und

ii) $-2k\,\alpha_k + (2-k^2)\,\beta_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

Aus ii) erhält man $\alpha_k = \frac{2-k^2}{2k}\,\beta_k \quad (k \in \mathbb{N})$

und in i) eingesetzt ergibt dies

$$\Bigg(\underbrace{(2-k^2)\frac{(2-k^2)}{2k} + 2k}\Bigg)\,\beta_k = \frac{(-1)^k}{k^2},$$

$$= \frac{4-4k^2+k^4}{2k} + \frac{4k^2}{2k}$$

$$= \frac{k^4+4}{2k}$$

also $\beta_k = \frac{(-1)^k \cdot 2}{k(k^4+4)}$

und $\alpha_k = \frac{(2-k^2)(-1)^k}{k^2(4+k^4)}$.

Als Lösungskandidat ergibt sich damit

$$y_p(x) = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-k^2)(-1)^k}{k^2(4+k^4)}\cos(kx) + \frac{(-1)^k \cdot 2}{k(4+k^4)}\sin(kx).$$

Da sowohl $y_p(x)$ als auch $y_p'(x)$ und $y_p''(x)$ gleichmäßig konvergent sind, was man mit dem Majorantenkriterium nachprüfen kann, ist diese Reihe tatsächlich Lösung der Dgl.

(Beweisskizze für die glm. Konvergenz: Betrachte z.B. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) =: \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k(x)$.

Für $k \geq 2$ gilt dann:

$$0 \leq |\tilde{\alpha}_k(x)| = \left| \frac{(2-k^2)(-1)^k}{k^2(4+k^4)} \cos(kx) \right|$$

$$\leq \frac{k^2-2}{k^2(4+k^4)} \leq \frac{k^2}{k^6} = \frac{1}{k^4}.$$

Somit ist $|\alpha_1| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ eine konvergente Majorante, und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k(x)$ konvergiert glm.

Analog zeigt man die glm. Konvergenz der übrigen auftretenden Reihen.)

Mit $A, B \in \mathbb{R}$ sind alle Lösungen der Dgl. durch

$$y(x) = e^{-x}(A \cos x + B \sin x) + \frac{\pi^2}{24} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-k^2)(-1)^k}{k^2(4+k^4)} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2}{k(4+k^4)} \sin(kx)$$

gegeben.

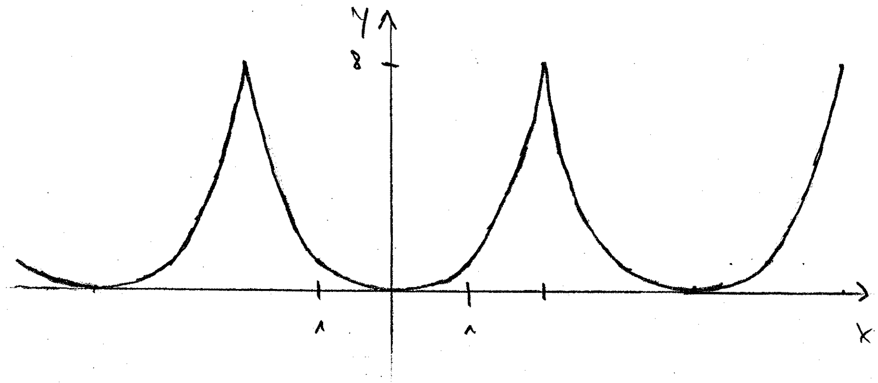
(7) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f(x) = |x|^3 \quad \text{für} \quad x \in [-2, 2)$$

und

$$f(x+4) = f(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Skizze:



Die Funktion f ist nicht 2π-periodisch. Insbesondere können die Formeln zur Berechnung nicht ohne weiteres angewendet werden.
Man behilft sich nun folgendermaßen:
Ist f p-periodisch, so sehe $y = \frac{x}{p} \cdot 2\pi$ bzw. $x = \frac{py}{2\pi}$. Dann ist

$$f(x) = f\left(\frac{py}{2\pi}\right) =: \tilde{f}(y) = \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{p} x\right),$$ wobei die

Funktion $\tilde{f}$ nun 2π-periodisch ist.
Wir bilden nun die Fourierkoeffizienten von $\tilde{f}$:

$$c_k = \langle \tilde{f}, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(y)\, e^{-iky}\, dy$$

$$\underset{y = \frac{2\pi}{p} \cdot x}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{p} x\right) e^{-ik\frac{2\pi}{p} x} \cdot \frac{2\pi}{p}\, dx$$

$$= \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\, e^{-ik\frac{2\pi}{p} x}\, dx.$$

Analog erhält man

$$a_k = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{p} x\right) dx$$

und

$$b_k = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{p} x\right) dx .$$

Sinnvollerweise (um die Ergebnisse für 2π-periodische Funktionen übertragen zu können) setzt man nun

$$(\mathcal{F} f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{p} x}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{p} x\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{p} x\right) .$$

Im vorliegenden Fall ist $p = 4$, und f eine gerade Funktion. Somit sind die Koeffizienten $b_k = 0$ für $k = 1, 2, \ldots$, d.h. $\mathcal{F}f$ ist eine reine Cosinusreihe.

Wir berechnen für $k \neq 0$:

$$a_k = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} |x|^3 \cos\left(k \frac{\pi}{2} x\right) dx$$

$$\overset{\text{Integrand gerade}}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{|x|^3}_{= x^3} \cos\left(k \frac{\pi}{2} x\right) dx$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \left[\frac{x^3}{k \frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right) \right]_0^2 - \frac{3}{k \frac{\pi}{2}} \int_0^2 x^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right) dx$$

$$= 0 - \frac{6}{k\pi} \left(\left[\frac{-2x^2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right) \right]_0^2 + \frac{4}{k\pi} \int_0^2 x \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right) dx \right.$$

$$= -\frac{6}{k\pi}\left(\frac{-8}{k\pi}(-1)^k\right) - \frac{24}{(k\pi)^2}\int_0^2 x\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{48}{(k\pi)^2}(-1)^k - \frac{24}{(k\pi)^2}\left(\left[\frac{2x}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_0^2 - \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)dx\right)$$

$$= \frac{48}{(k\pi)^2}(-1)^k + \frac{24}{(k\pi)^2}\cdot\frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{48}{(k\pi)^2}(-1)^k - \frac{96}{(k\pi)^4}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{48}{(k\pi)^2} - \frac{96}{(k\pi)^4}\right)(-1)^k + \frac{96}{(k\pi)^4}$$

und

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 |x|^3\,dx = \int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = 4.$$

Damit erhalten wir

$$(\mathcal{F}f)(x) = \underbrace{2}_{=\frac{a_0}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{48}{k^2\pi^2} - \frac{96}{k^4\pi^4}\right)(-1)^k + \frac{96}{k^4\pi^4}\right]\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$$

Alternative Rechnung im Komplexen:

$$c_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 |x|^3 e^{-ik\frac{\pi}{2}x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^0 -x^3 e^{-ik\frac{\pi}{2}x}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^2 x^3 e^{-ik\frac{\pi}{2}x}\,dx$$

$$\overset{\text{Subst.}}{\underset{y=-x}{=}} \frac{1}{4}\int_0^2 y^3 e^{ik\frac{\pi}{2}y}\,dy + \frac{1}{4}\int_0^2 x^3 e^{-ik\frac{\pi}{2}x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 x^3 \left(e^{ik\frac{\pi}{2}x} + e^{-ik\frac{\pi}{2}x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 \cos\left(\frac{k\pi}{2} x \right) dx$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{2} a_k$$

Außerdem ist (wegen $\cos(x) = \cos(-x)$) $\quad c_k = c_{-k}$.

Somit $\quad (\mathcal{F}f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{2}x} = $ s.o.