

Höhere Mathematik II

Lösungen zum 3. Übungsblatt

①

Wie in HPI gezeigt wurde, existiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

im unregelmäßigen Sinne, und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} I(n) &:= \int_{-(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt \\ &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}}_{= f(t)} \underbrace{\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\pi \sin \frac{t}{2}}}_{= D_n(t)} dt. \end{aligned}$$

Setzt man die Funktion $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(t) = \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}$, 2π -periodisch auf ganz \mathbb{R} fort,
 und betrachtet die Fortsetzung mit \tilde{f} , so ist $\tilde{f} \in V$
 (Def. von V siehe Vorlesung bzw. 2. Übungsblatt), und
 \tilde{f} ist bekanntlich in $t=0$ stetig differenzierbar.

Gemäß Vorlesung gilt somit:

$$I(n) = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) D_n(t) dt$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \frac{1}{2} [\tilde{f}(0^-) + \tilde{f}(0^+)] &= \pi \tilde{f}(0) \\ &= \pi f(0) = \pi. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$

②

Es ist $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

$$\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \left\{ \vec{x} = r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3 : r, s, t \in \mathbb{C} \right\}.$$

Umkehrside die Vektoren auf linearer Abhängigkeit:

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig \Leftrightarrow

$$(r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow r=s=t=0).$$

Im vorliegenden Fall:

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}$$

Aus der Bedingung für die 2. Komponente folgt: $-2r - 2t = 0$,
also $s = -t$. (*)

Eingesetzt in die 1. Komponente: $r + 2s + 5t = 0$,
also $s = -2r$. (**)

Eingesetzt in die 3. Komponente: $3r + 5s + 13t = 0$,
liefert mit (*) und (**)

$$3r + 10r - 13r = 0 \quad \text{für alle } r \in \mathbb{C}.$$

D.h. $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$, und daher sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$
linear abhängig.

Wir erhalten $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, d.h. $\vec{v}_3 \in \text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$,
und damit:

$$\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{Lin}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2)$$

$$= \left\{ \vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \left\{ \vec{x} = (\lambda_1 + \lambda_3) \vec{v}_1 + (\lambda_2 + 2\lambda_3) \vec{v}_2 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \{ x = p_1 \vec{v}_1 + p_2 \vec{v}_2 : p_1, p_2 \in \mathbb{C} \} = \text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Daher ist $\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Genauso sagt man: $\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_3) = \text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ und
 $\text{Lin}(\vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$,

und somit sind die vier Vektorräume identisch.

③

Um die Eigenschaft b) zu genießen, muss gelten

$$\vec{b}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1, \quad \vec{b}_2 = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{a}_2$$

$$= \lambda_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{b}_3 = \gamma_1 \vec{b}_1 + \gamma_2 \vec{b}_2 + \gamma_3 \vec{a}_3$$

$$\vec{b}_4 = \eta_1 \vec{b}_1 + \eta_2 \vec{b}_2 + \eta_3 \vec{b}_3 + \eta_4 \vec{a}_4$$

Die Koeffizienten $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \eta_1, \dots, \eta_4$ müssen nun so gewählt werden, dass auch a) erfüllt ist.

(Erinnerung: In \mathbb{C}^4 ist das Standardskalarprodukt wie folgt definiert: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i \bar{y}_i \quad (x, y \in \mathbb{C}^4)$.)

• zu \vec{b}_1 : $\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$. Dann ist

$$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle = \langle \lambda_1 \vec{a}_1, \lambda_1 \vec{a}_1 \rangle = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle$$

$$= |\lambda_1|^2 \|\vec{a}_1\|^2 \stackrel{!}{=} \delta_{1,1} = 1.$$

$$\Leftrightarrow 1 = |\lambda_1|^2 \|\vec{a}_1\|^2 = |\lambda_1|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= |\lambda_1|^2 \cdot 5, \quad \text{also} \quad |\lambda_1| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Wähle} \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

• zu \vec{b}_2 : $\vec{b}_2 = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{a}_2$.

$$\text{Es soll gelten:} \quad 0 = \delta_{1,2} = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle$$

$$= \langle \vec{b}_1, \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 \rangle = \mu_1 \underbrace{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle}_{= \delta_{1,1} = 1} + \mu_2 \langle \vec{b}_1, \vec{a}_2 \rangle$$

und damit $\mu_1 = -\mu_2 \overline{\langle \vec{b}_1, \vec{a}_1 \rangle} = -\mu_2 \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} \vec{b}_2 &= -\mu_2 \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 \\ &= \mu_2 (\vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1) \\ &= \mu_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2i/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \mu_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (2i) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2i/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \mu_2 \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -\frac{1}{5} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weil $\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle = |\mu_2|^2 \left\langle \begin{pmatrix} 2i/5 \\ -1/5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i/5 \\ -1/5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= |\mu_2|^2 \left(\frac{4}{25} + \frac{1}{25} + 4 + 1 \right) = |\mu_2|^2 \frac{130}{25} \stackrel{!}{=} \overset{!}{\sigma_{L_2}} = 1$$

folgt $|\mu_2|^2 = \frac{25}{130}$. Wir wählen $\mu_2 = \frac{5}{\sqrt{130}}$ |

damit ist $\vec{b}_2 = \frac{5}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -\frac{1}{5} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \cdot \text{zu } \vec{b}_3: \quad 0 = \sigma_{1,3} & \stackrel{!}{=} \langle \vec{b}_1, \vec{b}_3 \rangle \\ & = \underbrace{\gamma_1 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle}_{=1} + \underbrace{\gamma_2 \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle}_{=0} + \gamma_3 \langle \vec{b}_1, \vec{a}_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1 = -\gamma_3 \langle \vec{a}_3, \vec{b}_1 \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Wobei soll gelten} \quad 0 = \sigma_{2,3} & \stackrel{!}{=} \langle \vec{b}_2, \vec{b}_3 \rangle \\ & = \underbrace{\gamma_1 \langle \vec{b}_2, \vec{b}_1 \rangle}_{=0} + \underbrace{\gamma_2 \langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle}_{=1} + \gamma_3 \langle \vec{b}_2, \vec{a}_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2 = -\gamma_3 \langle \vec{a}_3, \vec{b}_2 \rangle$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$\vec{b}_3 = -\gamma_3 \langle \vec{a}_3, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 - \gamma_3 \langle \vec{a}_3, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 + \gamma_3 \vec{a}_3$$

$$= \gamma_3 \left(\vec{a}_3 - \langle \vec{a}_3, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 - \langle \vec{a}_3, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 \right)$$

$$= \gamma_3 \left[\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$= \gamma_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{15}{130} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \gamma_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{13}i \\ -\frac{3}{26} \\ -\frac{4}{26} \\ -\frac{11}{26} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \langle \vec{b}_2, \vec{b}_3 \rangle &= |\beta_3|^2 \left(\frac{36}{676} + \frac{9}{676} + \frac{16}{676} + \frac{121}{676} \right) \\ &= |\beta_3|^2 \frac{182}{676} = |\beta_3|^2 \frac{7}{26} \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

$$\text{folgt } |\beta_3|^2 = \frac{26}{7} \quad \text{Wir wählen } \beta_3 = \sqrt{\frac{26}{7}}$$

Damit ist

$$\vec{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ zu } \vec{b}_4: \quad 0 &= \delta_{1,4} \stackrel{!}{=} \langle \vec{b}_1, \vec{b}_4 \rangle = \gamma_1 + \gamma_4 \langle \vec{b}_1, \vec{a}_4 \rangle, \\ \text{also } \gamma_1 &= -\gamma_4 \langle \vec{a}_4, \vec{b}_1 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{2,4} \stackrel{!}{=} \langle \vec{b}_2, \vec{b}_4 \rangle = \gamma_2 + \gamma_4 \langle \vec{b}_2, \vec{a}_4 \rangle, \\ \text{also } \gamma_2 &= -\gamma_4 \langle \vec{a}_4, \vec{b}_2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{3,4} \stackrel{!}{=} \langle \vec{b}_3, \vec{b}_4 \rangle = \gamma_3 + \gamma_4 \langle \vec{b}_3, \vec{a}_4 \rangle, \\ \text{also } \gamma_3 &= -\gamma_4 \langle \vec{a}_4, \vec{b}_3 \rangle \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} \vec{b}_4 &= \gamma_4 \left(\vec{a}_4 - \langle \vec{a}_4, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 - \langle \vec{a}_4, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 - \langle \vec{a}_4, \vec{b}_3 \rangle \vec{b}_3 \right) \\ &= \gamma_4 \left[\begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{182}} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma_4 \left[\begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3i}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{14}{130} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{16}{182} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \right] \\
&= \gamma_4 \left[\begin{pmatrix} i \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{546i}{910} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{98}{910} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{80}{910} \begin{pmatrix} 6i \\ -3 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \right] \\
&= \gamma_4 \cdot \frac{1}{910} \begin{pmatrix} 780i \\ -390 \\ 390 \\ 390 \end{pmatrix} = \gamma_4 \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 78i \\ -39 \\ 39 \\ 39 \end{pmatrix} \\
&= \gamma_4 \frac{39}{91} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wage $\langle \vec{b}_4, \vec{b}_4 \rangle = |\gamma_4|^2 \left(\frac{39}{91} \right)^2 \cdot 7 \stackrel{!}{=} 1$

folgt $|\gamma_4|^2 = \frac{1}{7} \left(\frac{91}{39} \right)^2$

Wir wählen $\gamma_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{91}{39}$, also $\vec{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit besitzen die so konstruierten Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ die Eigenschaften a) und b).

Bemerkungen: Wir haben in dieser Aufgabe die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$, die eine Basis des \mathbb{C}^4 darstellen, orthogonalisiert und so eine Orthonormalbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ des \mathbb{C}^4 gewonnen, die auf den Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$ "beruht".

Dieses Verfahren nennt man Gram-Schmidt'sches

Orthonormalisierungsverfahren:

Dabei setzt man allgemein

$$\vec{b}_i = \frac{\vec{b}_i}{\|\vec{b}_i\|} \quad \text{mit } \vec{b}_i = \vec{a}_i - \dots$$

$$\vec{b}_i = \vec{a}_i - \langle \vec{a}_i, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 - \dots - \langle \vec{a}_i, \vec{b}_{i-1} \rangle \vec{b}_{i-1} .$$

$$\vec{b}_i = 1, \dots, n, \dots$$

④

Es sein U, V, W komplexe Vektorräume, $f \in L(U, V)$,
 $g \in L(V, W)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in U$.

Definitionsgemäß geht $g \circ f : U \rightarrow W$.

Zu zeigen ist also nur noch die folgende Gleichheit.

$$(g \circ f)(\alpha x + \beta y) = \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y)$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha x + \beta y) & \stackrel{\text{Def.}}{=} g(f(\alpha x + \beta y)) \\ & \stackrel{\text{Lin.}}{=} g(\underbrace{\alpha f(x)}_{\substack{\text{EV} \\ \text{EV}}} + \underbrace{\beta f(y)}_{\substack{\text{EV} \\ \text{EV}}}) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Lin.}}{=} \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y))$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y).$$

Da $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in U$ beliebig waren, ist $g \circ f \in L(U, W)$.

⑤

Es sei V, W endl.-dim. Vektorräume, und $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus. Wir wollen $\dim V = \dim W$ zeigen.

Es sei dazu v_1, \dots, v_n eine Basis von V , d.h. $V = \text{Lin}(v_1, \dots, v_n)$ und v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.

Wir definieren Vektoren $w_1, \dots, w_n \in W$ durch

$$w_k = f(v_k) \quad (k=1, \dots, n).$$

Nun zeigen wir

1. $W = \text{Lin}(w_1, \dots, w_n)$
2. w_1, \dots, w_n sind linear unabhängig.

ht dies gezeigt, so gilt $\dim W = \dim V$, denn w_1, \dots, w_n ist dann eine Basis von W .

Zu 1.): Es sei $w \in W$. Da f als Isomorphismus insbesondere bijektiv ist, existiert ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Da v_1, \dots, v_n eine Basis von V bilden, existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k,$$

und damit ist

$$\begin{aligned} w &= f(v) = f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) \\ &\stackrel{f \text{ linear}}{=} \sum_{k=1}^n \alpha_k f(v_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k \in \text{Lin}(w_1, \dots, w_n). \end{aligned}$$

Damit ist 1. gezeigt.

Zu 2.) Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n &= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \\ &\stackrel{\text{Lin}}{=} f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0. \end{aligned}$$

Da f als Homomorphismus bijektiv ist, existiert genau ein Element $v \in V$ mit $f(v) = 0$, nämlich $v = 0$.

Also gilt $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, und da

v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind, ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Daher sind auch v_1, \dots, v_n linear unabhängig.

⑥

a) Beweis per Induktion:

$$IA: m=1: \left\langle \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k \mid v \right\rangle = \langle \alpha_1 u_1 \mid v \rangle$$

$$= \alpha_1 \langle u_1 \mid v \rangle \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \langle u_k \mid v \rangle$$

IS: $m \rightarrow m+1$:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k u_k \mid v \right\rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} \left\langle \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k u_k \right) + \alpha_{m+1} u_{m+1} \mid v \right\rangle$$

$$\stackrel{\text{lin.}}{=} \left\langle \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k \mid v \right\rangle + \langle \alpha_{m+1} u_{m+1} \mid v \rangle$$

$$\stackrel{(IV)}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \langle u_k \mid v \rangle + \alpha_{m+1} \langle u_{m+1} \mid v \rangle$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \langle u_k \mid v \rangle$$

b) Es ist

$$\left\langle \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k \mid \underbrace{\sum_{l=1}^m \beta_l v_l}_{\in V} \right\rangle \stackrel{a)}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \left\langle u_k \mid \sum_{l=1}^m \beta_l v_l \right\rangle$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \left\langle \sum_{l=1}^m \beta_l v_l \mid u_k \right\rangle$$

$$\stackrel{a)}{=} \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{l=1}^m \beta_l \langle v_l \mid u_k \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{l=1}^n \overline{\beta_l} \overline{\langle v_l | u_k \rangle}$$

$$= \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{l=1}^n \overline{\beta_l} \langle u_k | v_l \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \alpha_k \overline{\beta_l} \langle u_k | v_l \rangle \quad .$$

7

a) Da die Vektoren v_1, \dots, v_n mit $n \in \mathbb{N}$ eine Basis des Vektorraums V bilden, läßt sich jedes $u \in V$ eindeutig schreiben als

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$$

mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} . Dabei hängen die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ offensichtlich von $u \in V$ ab.

Aufgrund der Orthogonalität der Vektoren v_1, \dots, v_n gilt für alle $k=1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \langle u, v_k \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k, v_k \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Aufg. 4.}}{=} \sum_{k=1}^n \alpha_k \underbrace{\langle v_k, v_k \rangle}_{= \delta_{kk}} = \alpha_k \end{aligned}$$

Damit folgt

$$u = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle v_k$$

b) Mit a) gilt für $u, w \in V$:

$$u = \sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle v_k \quad \text{solch} \quad w = \sum_{k=1}^n \langle w, v_k \rangle v_k$$

→ Aufgabe 4 b) folgt nun

$$\langle u, w \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle v_k, \sum_{k=1}^n \langle w, v_k \rangle v_k \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle u, v_k \rangle \overline{\langle w, v_l \rangle} \underbrace{\langle v_k, v_l \rangle}_{= \delta_{kl}} \\
 \text{Orth.}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle \overline{\langle w, v_k \rangle}$$

c) Mit c) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \langle u, u \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle \overline{\langle u, v_k \rangle} \\
 &= \sum_{k=1}^n |\langle u, v_k \rangle|^2
 \end{aligned}$$

8) a) Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{a}\| = 1$. Insbesondere ist dann $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Bild $\text{proj}_{\vec{a}}$: Es sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Dann ist } \text{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{a})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \vec{a} \in \text{Lin}(\vec{a}).$$

Ist $\vec{y} \in \text{Lin}(\vec{a})$, also $\vec{y} = \lambda \vec{a}$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$,

so gilt

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{a}}(\vec{y}) &= (\vec{y} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = (\lambda \vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} \\ &= (\lambda \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{a})}_{\|\vec{a}\|^2 = 1}) \cdot \vec{a} \\ &= \lambda \vec{a} = \vec{y}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\text{Bild}(\text{proj}_{\vec{a}}) = \text{Lin}(\vec{a})$.

Kern $\text{proj}_{\vec{a}}$: Es sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{0}$.

$$\text{Dann ist } \vec{0} = \text{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{a})}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\vec{a}}_{\neq \vec{0}}.$$

Daher muss $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$, d.h. $\vec{x} \perp \vec{a}$ gelten.

Gilt $\vec{x} \perp \vec{a}$, so ist offensichtlich $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{0}$.

Wir erhalten also

$$\text{Kern}(\text{proj}_{\vec{a}}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \perp \vec{a} \}$$

b) Es sei $D: C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ definiert durch

$$Df = f' \quad (f \in C^1(\mathbb{R})).$$

Kern D : Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $Df = 0$,

d.h. $Df = f' = 0$, also $f = \text{const.}$.

ist $f = \text{const.}$, so ist offensichtlich $f \in \text{Kern } D$.

Somit erhalten wir $\text{Kern } D = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f = \text{const.} \}$.

Bild D: Es sei $g \in C^0(\mathbb{R})$. Wir setzen

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt. \quad \text{Dann ist } f \in C^1(\mathbb{R})$$

und es gilt $f'(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

d.h. $g = f' = Df$.

Und somit ist $\text{Bild } D = C^0(\mathbb{R})$.

c) Es sei $I: C^0(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$ definiert durch

$$(If)(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}, f \in C^0(\mathbb{R}))$$

Kern I: offensichtlich ist $f = 0 \in \text{Kern } I$.

Es sei $g \in \text{Kern } I$. Dann ist

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt = 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

insbesondere folgt daraus $G'(x) = g(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$,

also $g = 0$.

Damit ist $\text{Kern } I = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \} = \{0\}$.

Bild I: Es sei $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Wegen $(If)(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$, ist

$If \in C^1(\mathbb{R})$

$$\text{Bild } I \subseteq \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f(0) = 0 \}.$$

Let $g \in \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f(0) = 0 \}$ and
 $g' \in C^0(\mathbb{R})$ and

$$(\mathbb{I}g')(x) = \int_0^x g'(t) dt = g(x) - \underbrace{g(0)}_{=0} = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

sho $\mathbb{I}g' = g$.

Wv what $\text{Bild } \mathbb{I} = \{ f \in C^1(\mathbb{R}) : f(0) = 0 \}$.

9

Es sei $S: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definiert durch

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \quad (x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2).$$

Dieser Operator wird auch Linksverschiebung genannt.

Gemäß Vorlesung ist ℓ^2 ein Vektorraum, d.h.

mit $x, y \in \ell^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ sind auch $x+y$ sowie $\alpha x \in \ell^2$.

Zur Linearität: Mit $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ist

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \in \ell^2, \text{ denn}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$

Es seien nun $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$

und $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dann ist

$$S(x+y) = S(\underbrace{x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \dots}_{\in \ell^2})$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \underbrace{(x_2+y_2, x_3+y_3, \dots)}_{\in \ell^2}$$

$$\stackrel{\ell^2 \text{ VR}}{=} (x_2, x_3, \dots) + (y_2, y_3, \dots)$$

$$= S(x_1, x_2, x_3, \dots) + S(y_1, y_2, y_3, \dots)$$

$$= S(x) + S(y).$$

$$\text{Weiter ist } S(\alpha x) = S(\underbrace{\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots}_{\in \ell^2, \text{ da } \ell^2 \text{ VR}})$$

$$\stackrel{\text{Def.}}{=} \underbrace{(\alpha x_2, \alpha x_3, \dots)}_{\in \ell^2}$$

$$\stackrel{\ell^2 \text{ VR}}{=} \alpha (x_2, x_3, \dots)$$

$$= \alpha S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \alpha S(x).$$

Also ist der Operator $S: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ linear.

Zum Kern: Es sei $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \text{Kern } S$.

$$\text{Dann gilt } S(x) = (x_2, x_3, \dots) = (0, 0, 0, \dots),$$

$$\text{also } x_k = 0 \quad (k \geq 2, k \in \mathbb{N}).$$

Wir erhalten somit

$$\text{Kern } S = \{ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2 : x_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 2) \}.$$

Zum Bild: Es sei $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$

$$\text{Setzt man } \tilde{x} = (0, x_1, x_2, x_3, \dots), \text{ so ist wegen}$$

$$|0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2, \quad \tilde{x} \in \ell^2.$$

$$\text{Es gilt } S(\tilde{x}) = S(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots) = x,$$

und wir erhalten

$$\text{Bild}(S) = \ell^2.$$