1. Übungsklausur
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad x^2y'' - 7xy' + 15y = x, \quad y(1) = y'(1) = 0\,.$$

a) Um welchen Differentialgleichungstyp handelt es sich?

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $(*)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Entwickeln Sie $f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$, in eine Cosinusreihe.

b) In welchem Sinn konvergiert die Reihe auf $[0,\pi]$?
Geben Sie für jedes $x \in [0,\pi]$ den Wert an, gegen den die Reihe konvergiert.
(Begründen Sie.)

c) Geben Sie die Werte der folgenden beiden Reihen an:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)}\,.$$

Hinweis: Sie können für c) ohne Beweis verwenden:

$$(\mathcal{F}f)(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit $a_k = \dfrac{2((-1)^k+1)}{\pi(1-k^2)}$, $k = 2, 3, \ldots$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Funktionen b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 seien gegeben durch

$$b_1(x) = \sin^2 x, \quad b_2(x) = \sin x \cos x, \quad b_3(x) = \cos^2 x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

und

$$c_1(x) = (\sin x + \cos x)\sin x, \quad c_2(x) = (\cos x + \sin x)\cos x, \quad c_3(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})\ .$$

Weiter sei $V = \mathrm{Lin}\,(b_1, b_2, b_3)$.

a) Zeigen Sie, dass durch $Lv := v' + 2v$ eine lineare Abbildung $L : V \to V$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

c) Zeigen Sie, dass c_1, c_2, c_3 eine Basis von V bilden.

d) Bestimmen Sie die zu

$$L : (V,\ \{b_1, b_2, b_3\}) \longrightarrow (V,\ \{c_1, c_2, c_3\})$$

gehörende Abbildungsmatrix.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Spalten der $(4,4)$–Matrix A seien gegeben durch

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\mathrm{rang}\,(A)$ und $\det(A)$.

b) Gegeben sei $\vec{y} \in \mathbb{C}^4$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{y}$.

c) Berechnen Sie $M \cap N$ für $M = \mathrm{Lin}\,(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ und $N = \mathrm{Lin}\,(\vec{a}_3, \vec{a}_4)$.

d) Zeigen Sie, dass jeder Vektor $\vec{b} \in \mathbb{C}^4$ eindeutig in der Form $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n}$ mit $\vec{m} \in M$ und $\vec{n} \in N$ dargestellt werden kann.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, den **13. Juni 2007**, im Sekretariat (312) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschliesslich am **14. Juni 2007** von 13.15 – 13.45 Uhr im Seminarraum S 33 möglich.