Vorlesungszusammenfassung HM II SS 2007

Kapitel 17 Zu Gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGln)

17.1 Die DGl mit getrennten Variablen:

(1) $y' = f(x) g(y)$.

Hier sind $f: I \to \mathbb{R}$ und $g: J \to \mathbb{R}$ (I, J Intervalle) gegebene stetige Funktionen mit $g(t) \neq 0$ für $t \in J$.
Gesucht ist eine Lösung der Gleichung (1). D.h.: gesucht ist eine C^1-Funktion $\varphi: \tilde{I} \subset I \to J$ mit

$$\varphi'(x) = f(x) g(\varphi(x)), \quad x \in \tilde{I}.$$

Satz 1: Es sei G eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ und F eine Stammfunktion von f. Jede Lösung $y = \varphi(x)$ der DGl (1) wird implizit durch $G(\varphi(x)) = F(x) + C, x \in \tilde{I}$, mit einer beliebigen Konstanten C gegeben.

Das kann man auch so formulieren: Für jede Konstante $\tilde{c}$ wird $y = \varphi(x)$ durch $\int_{\varphi(\tilde{c})}^{\varphi(x)} \frac{d\tau}{g(\tau)} = \int_{\tilde{c}}^{x} f(\tau)\, d\tau$ gegeben.

1. Beispiel (2) $y' = f(x) y$ linear, homogen, 1. Ordnung, $\boxed{f \in C(I)}$,

gesucht ist $y = \varphi(x) \in C^1$ mit $\varphi'(x) = f(x)\varphi(x) \; \forall x \in I$

Satz 2: Alle Lösungen $y = \varphi(x)$ der DGl (2) sind gegeben durch $y = \varphi(x) = C \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right), x \in I$.
Hierbei ist C eine beliebige Konstante und $x_0 \in I$ beliebig, fest.

2. Beispiel (3) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ $(x \neq 0)$ Ähnlichkeitsdgl

Gesucht ist $y = \varphi(x) \in C^1$ mit $\varphi'(x) = f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) \; \forall x$.
Anstelle von φ wird u mit $u(x) := \frac{\varphi(x)}{x}$ gesucht.
Die DGl für u: $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ ist eine DGl mit

getrennten Variablen. Ist $u = u(x)$ eine Lösung, so ist $y = \varphi(x) = x\,u(x)$ Lösung von (3).

Beispiel der Vorlesung:

$$x^2 y' = x^2 + xy + y^2 \qquad (x \neq 0)$$

Lösung $y = \varphi(x) = x \tan(\ln|x| + c)$, c konst.

(Diskutiere den Defbereich von φ)

17.2 (4) $\underline{y' + p(x)y = q(x)y^\alpha}$ Bernoulli DGL

Es seien $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$, $p, q \in C^0(I)$ gegeben. Gesucht ist $y = \varphi(x) > 0$, $\varphi \in C^1(\tilde{I} \subset I)$ mit

(4) $\varphi'(x) + p(x)\varphi(x) = q(x)\varphi(x)^\alpha \quad , x \in \tilde{I}$.

Es sei $x_0 \in I$ beliebig, fest. Mit $\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)$

bilde $(4) \cdot \mu(x)$. Dies ergibt eine DGL für $\mu(x)\varphi(x)$ mit getrennten Variablen. Für jede Konstante c ist

(5) $$y = \varphi(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[c + (1-\alpha)\int_{x_0}^{x} q(t)\,\mu(t)^{1-\alpha}\,dt\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Lösung von (4).

Beispiel: Für $\alpha = 0$ erhalten wir die lineare inhomogene DGL 1. Ordnung:

(6) $\underline{y' + p(x)y = q(x) \quad , x \in I}$

mit der allgemeinen Lösung (c beliebig Konstant)

(7) $$y = \varphi(x) = \underbrace{c\,e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}}_{=:\varphi_h(x)} + \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau} \underbrace{\int_{x_0}^{x} q(t)\, e^{\int_{x_0}^{t} p(\tau)d\tau}\,dt}_{=c(x)}}_{\varphi_p(x) \,=\, c(x)\varphi_h(x)}$$

φ_h ist eine nichttriviale Lösung der homogenen Gleichung

φ_p (partikuläre Lösung) ist eine spezielle Lösung der Gleichung (6). Somit sagt (7) aus:

<u>Satz 3</u> <u>Die allgemeine Lösung von (6) ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (6) ($c\varphi_h$) + eine spezielle Lösung (φ_p) der inhomogenen Gleichung (6).</u>

Beispiele: $xy' + 3y = x^2 \quad (x \neq 0)$

$$\frac{y'}{y} = x \ln y + 2x \quad (y > 0).$$

noch zu (7): <u>Variation der Konstanten</u>

Zur Berechnung von φ_p mache den Ansatz

$\varphi_p(x) = C(x)\,\varphi_h(x)$ mit einer aus der DGl

zu berechnenden (und berechenbaren) Funktion $C = C(x)$.

<u>17.3</u> <u>Die lineare DGl 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten</u>

(8) $\underline{(Ly)(x) := (y'' + 2ay' + by)(x) = f(x)}, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R}$

1. V, W seien komplexe Vektorräume. Die Abbildung $A : V \to W$ heißt <u>linearer Operator</u>, falls $A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A(v_1) + \beta A(v_2)$ gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $v_1, v_2 \in V$.

<u>Beispiele</u>

1) $V = C^1[0,1]$, $W = C^0[0,1]$, $A = D$ (Differentiation)

$D : V \to W \quad : Df = f'$

2) $V = C^0[0,1]$, $W = C^1[0,1]$

$A : V \to W$ mit $Af = F$

mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ $(x_0, x \in [0,1])$

3) $V = C^1[0,1]$, $W = C^0[0,1]$: $A : V \to W$ mit

$Af = f' + pf$ (siehe 17.1 / 17.2)

2. Hier geht es um den linearen Operator

$L : C^2(I) \to C^0(I)$, der in (8) definiert

ist: $L := D^2 + 2aD + b$.

— Eine Konsequenz der Linearität ist die Möglichkeit der <u>Superposition</u> von Lösungen:

gilt $Ly_1 = f_1$ und $Ly_2 = f_2$, so gilt

für $y := \alpha y_1 + \beta y_2$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$: $Ly = \alpha f_1 + \beta f_2$.

Ist y komplexwertig, so hat man

$\mathrm{Re}(Ly) = L(\mathrm{Re}\, y)$, $\mathrm{Im}(Ly) = L(\mathrm{Im}\, y)$.

— Wir definieren die folgenden Funktionenmengen:

$\mathcal{L}_f := \{ y \in C^2(I) \,/\, (Ly)(x) = f(x), x \in I \}$ (= die allgemeine Lösung von (8))

$\mathcal{L}_0 = \{ y \in C^2(I) \,/\, (Ly)(x) = 0, x \in I \}$ (= die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (8))

Die oben eingeführte Linearität von L beinhaltet:

Aus $y_1, y_2 \in \mathcal{L}_0$ folgt $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{L}_0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

$\mathcal{L}_0$ ist ein VR.

Satz 4 (Struktur der allgemeinen Lösung der Gleichung (8) $Ly=f$)

Es sei $y_p \in \mathcal{L}_f$ bekannt. Dann gelten:

1. Zu jedem $y \in \mathcal{L}_f$ gibt es ein $y_0 \in \mathcal{L}_0$ mit $y = y_p + y_0$.
2. Für jedes $y_0 \in \mathcal{L}_0$ gilt $y_p + y_0 \in \mathcal{L}_f$.

Das kann man auch so schreiben: $\mathcal{L}_f = y_p + \mathcal{L}_0$. In Worten: Man erhält alle Lösungen der Gleichung $Ly=f$, indem man zu einer Lösung $y_p \in \mathcal{L}_f$ alle Lösungen der homogenen Gleichung addiert.

3. Zur Lösung von $Ly=f$.

1. Schritt: Löse $Ly=0$ mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$). Dies gibt für λ die Gleichung $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ mit den Wurzeln $\lambda_{1,2} = -a \pm \rho$, $\rho = \sqrt{a^2 - b}$.
Wir erhalten zwei l. u. Lösungen $y_{h_1}(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_{h_2}(x) = e^{\lambda_2 x}$ falls $\rho \neq 0$, für $\rho = 0$ zunächst nur $y_{h_1}(x) = e^{-ax}$.

2. Schritt: Bestimmung einer Lösung y_p von $Ly=f$ durch den Ansatz $y(x) = v(x)\, y_{h_1}(x)$ mit einer zu bestimmenden Funktion v. Für v erhält man die Gleichung

$$v''(x) + 2(\lambda_1 + a)\, v'(x) = e^{-\lambda_1 x} f(x)$$

(lineare Gleichung 1. Ordnung für v' (17.2)). Man erhält $v = v(x)$ und also $y(x) = v(x)\, e^{\lambda_1 x}$:

$$y(x) = y_p(x) + c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (\rho \neq 0)$$

$$y(x) = y_p(x) + c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \quad (\rho = 0)$$

mit beliebigen Konstanten c_1, c_2.

Ein Integralausdruck, der f beinhaltet und im Fall $f=0$ Null wird.
$y_p \in \mathcal{L}_f$.

Wir lesen ab: $\mathcal{L}_0 = \{y \,/\, y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$ $(\rho \neq 0)$

bzw. $\mathcal{L}_0 = \{y \,/\, y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$ $(\rho = 0)$.

Beispiel $\quad y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x} - e^{x}$

17.4 Die Dgl vom Eulerschen Typ

(9) $\quad x^2 y'' + 2axy' + by = f(x)$ $\quad (x > 0)$ oder $(x < 0)$, a, b konstant

$x > 0$: Ist $y = \varphi(x)$ Lösung von (9), so gilt für $\phi(t) := \varphi(e^t)$ die Gleichung ($(\cdot)^\bullet$ = Ableitung nach t)

$$\ddot{\phi}(t) + (2a-1)\dot{\phi}(t) + b\phi(t) = f(e^t)$$

Diese Gleichung kann gemäß 17.3 behandelt werden.
Die Lösung von (9) ist dann $y = \varphi(x) = \phi(\ln x)$, $x > 0$.

$x < 0$: Substitution $x = -e^t$, $t = \ln(-x)$. Ist $y = \varphi(x)$ Lösung, so gilt für $\psi(t) := \varphi(-e^t)$: $\ddot{\psi} + (2a-1)\dot{\psi}(t) + b\psi(t) = f(-e^t)$.
Die Lösung von (9) ist dann: $y = \varphi(x) = \psi(\ln(-x))$.

Beispiele: 1) Löse für $x > 0$ und $x < 0$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$$

2) Löse $\quad x^2 y'' + xy' - y = \ln|x|$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.