20.6 Der Taylorsatz

Taylorsatz

Es sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus $C^k(D)$ und $(k+1)$-mal partiell diff'bar. Es gelte $\{\vec{x}_0 + t(\vec{x}-\vec{x}_0),\ 0 \le t \le 1\} \subset D$.
Dann gibt es ein $\vartheta: 0 < \vartheta < 1$, so dass

$$\text{(T)}\quad f(\vec{x}) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\left(\left((\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla\right)^j f\right)(\vec{x}_0)}_{T_k(f,\vec{x}_0)(\vec{x})\ \text{Taylorpolynom}} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!}\left((\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla\right)^{k+1} f(\vec{x}_0+\vartheta(\vec{x}-\vec{x}_0))}_{R_k = o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^k),\ \vec{x}\to\vec{x}_0\ \text{(Restglied)}}$$

Es ist
$$(\vec{h}\cdot\nabla)^j f(\vec{x}_0) = \sum_{l_1=1}^{n}\cdots\sum_{l_j=1}^{n} h_{l_1} h_{l_2}\cdots h_{l_j}\,(\partial_{l_1}\partial_{l_2}\cdots\partial_{l_j} f)(\vec{x}_0)$$
$$= \sum_{\substack{j_1+\dots+j_n=j\\ j_1,\dots,j_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}} \frac{j!}{j_1!\,j_2!\cdots j_n!}\, h_1^{j_1} h_2^{j_2}\cdots h_n^{j_n}\,(\partial_1^{j_1}\cdots\partial_n^{j_n} f)(\vec{x}_0)$$

Hiermit kann man auch schreiben mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)}\\ \vdots \\ x_n^{(0)}\end{pmatrix}$:

$$T_k(f,\vec{x}_0)(\vec{x}) = \sum_{\substack{0\le j_1,\dots,j_n\le k\\ j_1+\dots+j_n\le k}} a_{j_1 j_2\cdots j_n}(x_1-x_1^{(0)})^{j_1}(x_2-x_2^{(0)})^{j_2}\cdots(x_n-x_n^{(0)})^{j_n}$$

mit
$$a_{j_1\cdots j_n} = \frac{1}{j_1!\,j_2!\cdots j_n!}(\partial_1^{j_1}\partial_2^{j_2}\cdots\partial_n^{j_n} f)(\vec{x}_0) \qquad (*)$$

Ist $f\in C^\infty(D)$ und gilt $R_k \to 0$ $(k\to\infty)$ (für die betrachteten $\vec{x}$),
so geht die Taylorformel in die Taylorreihe über:

$$T(f,\vec{x}_0)(\vec{x}) = \sum_{j_1,\dots,j_n=0}^{\infty} a_{j_1\cdots j_n}(x_1-x_1^{(0)})^{j_1}\cdots(x_n-x_n^{(0)})^{j_n}$$

mit $a_{j_1\cdots j_n}$ wie unter $(*)$.

$f(\vec{x})$ bis zur Ordnung 2 um $\vec{x}_0$ ((T) mit $k=2$):

$$f(\vec{x}) = T_2(f,\vec{x}_0)(\vec{x}) + R_2$$

(T2) $$\underline{f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) + \frac{1}{2!}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + R_2}$$

wobei $H_f(\vec{x}_0) = (D_k D_l f(\vec{x}_0))_{k,l=1,\dots,n}$ die (symmetrische) <u>Hesse Matrix von f an der Stelle $\vec{x}_0$</u> ist.

Für $n=2$ sieht H_f so aus:
$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} D_1^2 f(x_0,y_0) & D_1 D_2 f(x_0,y_0) \\ D_2 D_1 f(x_0,y_0) & D_2^2 f(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

<u>Bemerkungen:</u>

1) (T) für $n=1$ ist der "HMI-Taylor": $f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x-x_0)^{k+1}$

mit ξ zwischen x und x_0.

2) <u>MWS</u> ($k=0$, n beliebig in (T))
<u>$f: D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei stetig, ∇f existiere in D. Dann gibt es ein $\vartheta\in(0,1)$, so dass $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = (\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla f(\vec{x}_0 + \vartheta(\vec{x}-\vec{x}_0))$.</u>

<u>Folgerung</u>: Ist D zusammenhängend und $f: D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus C^1, so gilt: $f = \text{const}$ in D $\Leftrightarrow$ $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x}\in D$.

3) <u>Beispiele</u>: Entwickle um $(0,0)$:
$f(x,y) = (x-1)^4(y-2)^3$, $f(x,y) = e^{x+y} + \sin xy$,

$f(x,y) = x^2 - y^2$. Entwickle $f(x,y) = x^2-y^2$ um $(1,2)$.

20.7 Relative (Lokale) Extremwerte

Def: 1) $D \subset \mathbb{R}^n$ sei offene Menge und $f: D \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld.
$(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ $(\in D \times \mathbb{R})$ heißt lokales (relatives) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$

(Extremum) von f, falls es eine Umgebung $U(\vec{x}_0) \subset D$ gibt mit

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0) & \forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0) \\ f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) & \forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0). \end{array} \right.$$

Hat man $\left\{ \begin{array}{l} < \\ > \end{array} \right.$ $\forall \vec{x} \in U(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\}$, so heißt der Extremwert isoliert oder eigentlich.

2) Ist f diff'bar, so heißt ein $\vec{x}_0 \in D$ mit $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ stationärer oder kritischer Punkt von f in D.
Ist $\vec{x}_0 \in D$ stationär, so heißt $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ Sattelpunkt von f, wenn es in jeder Umgebung von $\vec{x}_0$ Punkte $\vec{u}, \vec{v} \in D$ mit $f(\vec{u}) < f(\vec{x}_0) < f(\vec{v})$ gibt.

Satz 9 $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, $\vec{x}_0 \in D$ sind gegeben. Es sei f diff'bar, und f besitze in $\vec{x}_0$ ein lokales Extremum. Dann gilt $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

(Für in D diff'bare Funktionen f sind die Punkte in D, in denen f extremal wird, unter den stationären Punkten zu suchen)

Beispiele: 1) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ist in $(0,0)$ minimal. f besitzt in D kein Maximum.

2) $f(x,y) = x^2 - y^2$. In $(0,0)$ liegt ein Sattelpunkt vor.

Satz 10: f, D wie oben. f sei zweimal stetig diff'bar und $\vec{x}_0 \in D$ sei stationärer Punkt von f. $H_f(\vec{x}_0)$ bezeichne die Hessematrix von f an der Stelle $\vec{x}_0$.

Es gelten dann:

a) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ $\left\{\begin{matrix} \text{positiv definit} \\ \text{negativ definit} \end{matrix}\right\}$ so ist $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ ein eigentliches lokales $\left\{\begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{matrix}\right\}$.

b) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit, so ist $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ ein Sattelpunkt

c) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ semidefinit, so ist keine allgemeine Aussage über den Charakter von $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ möglich. $\boxed{\text{vgl. 19.9}}$

(Im Fall $n = 2$ ist mit $\Delta(x_0, y_0) = (D_1^2 f \, D_2^2 f - (D_1 D_2 f)^2)(x_0, y_0)$

$H_f(x_0, y_0)$ positiv definit, falls $\Delta(x_0, y_0) > 0$ und $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$,
negativ definit, " " " $D_1^2 f(x_0, y_0) < 0$

gelten. Die Indefinitheit wird durch $\Delta(x_0, y_0) < 0$ und die Semidefinitheit durch $\Delta(x_0, y_0) = 0$ charakterisiert)

Für jede der Funktion

$f_1(x,y) = x^2 + y^4$, $f_2(x,y) = x^2$, $f_3(x,y) = x^2 + y^3$

ist $(0,0)$ stationär und $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semidefinit.

f_1 hat in $(0,0)$ ein eigentliches Minimum.
f_2 wird auf der ganzen y-Achse minimal.
f_3 hat in $(0,0)$ einen Sattelpunkt.

$\underline{\ddot{U}}$: Untersuche auf $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ hinsichtlich Extremwerten und Sattelpunkten.

20.8 Inverse und Implizite Funktionen

1. **Satz 11** $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in D \to \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ sei C^1 auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Für $\vec{x}_0 \in D$ sei die Matrix $\vec{f}'(\vec{x}_0)$ regulär. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset D$ von $\vec{x}_0$, so dass gelten:

a) $\vec{f}(U) =: V$ ist offene Menge in $\mathbb{R}^n$,
$\vec{f}|_U$ ist bijektiv und $\vec{f}^{-1}: V \to U$ ist C^1.

b) $(\vec{f}^{-1})'(\vec{y}) = \left(\vec{f}'(\vec{f}^{-1}(\vec{y}))\right)^{-1}$, $\vec{y} \in V$.

(Unter den oben formulierten Voraussetzungen sagt man auch: $\vec{f}$ ist lokal bei $\vec{x}_0$ invertierbar und f^{-1} ist in einer Umgebung von $\vec{f}(\vec{x}_0)$ aus C^1)

Beispiele:

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$, $D = \{(r,\varphi) \mid r > 0,\ 0 < \varphi < \pi\}$

$\vec{f}$ ist auf D invertierbar (Satz 11 $\to \vec{f}$ ist auf D lokal invertierbar)

$$\vec{f}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0.$$

$\vec{f}$ ist auf $\tilde{D} = \{(r,\varphi) \mid r > 0,\ 0 < \varphi < 4\pi\}$ nach Satz 11 lokal invertierbar. $\vec{f}$ ist auf $\tilde{D}$ nicht global invertierbar.

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \end{pmatrix}$ ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nach Satz 11 bei jedem Punkt lokal invertierbar.
$\vec{f}$ ist nicht auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ injektiv.

3. Es sei $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$
$(\vec{x},\vec{y}) \to \vec{f}(\vec{x},\vec{y})$ $\quad (\vec{y} \in \mathbb{R}^m, \vec{x} \in \mathbb{R}^n)$

gegeben. Gibt es eine Funktion $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$ mit $f(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = \vec{0}$, so heißt das, dass $\vec{h}$ durch die Gleichung $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$ implizit definiert ist. $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$ ist die Auflösung des Gleichungssystems $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$ nach $\vec{y}$.
Ist $\vec{f}$ in D diff'bar, so bezeichne

$\partial_x \vec{f}(\vec{x},\vec{y})$ die (m,n)-Matrix mit den Spalten $D_j \vec{f}(\vec{x},\vec{y})$, $j=1,\dots,n$

und $\partial_y \vec{f}(\vec{x},\vec{y})$ die (m,m)-Matrix mit den Spalten $D_k \vec{f}(\vec{x},\vec{y})$, $k = n+1,\dots,n+m$. Es ist $\vec{f}'(\vec{x},\vec{y}) = [\partial_x \vec{f}(\vec{x},\vec{y}), \partial_y \vec{f}(\vec{x},\vec{y})]$.

Satz 12 Es sei $\vec{f}$ wie oben gegeben. $\vec{f}$ sei auf der offenen Menge D stetig diff'bar. $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ sei ein Punkt aus D mit:
1. $\vec{f}(\vec{x}_0,\vec{y}_0) = \vec{0}$, 2. $\partial_y \vec{f}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ ist regulär

a) Dann gibt es eine Umgebung U von $\vec{x}_0$ in $\mathbb{R}^n$ und um $\vec{y}_0$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine Funktion $\vec{h}: U \to V$, $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$ mit $\vec{y}_0 = \vec{h}(\vec{x}_0)$ und $\vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = \vec{0}$, $\vec{x} \in U$.

b) $\vec{h} \in C^1(U)$: $\vec{h}'(\vec{x}) = -\left(\partial_y \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))\right)^{-1} \partial_x \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))$, $\vec{x} \in U$.

Beispiele: 1) Formuliere den Satz für $n = m = 1$ und diskutiere am Beispiel $f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2$ die Auflösung von $f(x,y) = 0$ nach x und nach y.
2) Durch $2e^{y_1} + y_2 x_1 - 4x_2 + 3 = 0$, $y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3 = 0$ ist bei $(3,2,7,0,1)$ implizit $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{h}(x_1,x_2,x_3)$ definiert.

Berechne $\vec{h}'(3,2,7)$.