3) Setzt man in Satz 2 $\vec{v} = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$ mit einem $C^0(\bar{G}) \cap C^1(G)$ – Vektorfeld $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, so erhält man <u>den Divergenzsatz im $\mathbb{R}^2$:</u>

$G, \partial G$ seien wie oben und $\vec{w} \in C^0(\bar{G}) \cap C^1(G)$. Dann gilt

$$\underline{\iint_G \nabla \cdot \vec{w} \, d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} \, ds}$$

wobei $\vec{N}$ die nach Außen bzgl G gerichtete Normale der Länge 1 auf ∂G ist.

4) <u>Folgerungen aus 3)</u>

$G, \partial G$ seien wie oben.

1. Ist $f \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ so gilt: $\underline{\iint_G \Delta f \, d(x,y) = \oint_{\partial G} D_{\vec{N}} f \, ds}$

2. Sind $f, g \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, so gelten:

$$\oint_{\partial G} f D_{\vec{N}} g \, ds = \iint_G (\nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f) \, d(x,y) \qquad \text{1. Greensche Formel}$$

$$\oint_{\partial G} (g D_{\vec{N}} f - f D_{\vec{N}} g) \, ds = \iint_G (g \Delta f - f \Delta g) \, d(x,y) \qquad \text{2. Greensche Formel}$$

<u>21.4</u> <u>Potentialfelder</u>

<u>Def</u>: Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld.

$\vec{v}$ heißt <u>Potentialfeld</u> (<u>Gradientenfeld</u>, <u>konservatives Feld</u>) auf G, falls es ein diff'bares Skalarfeld $f: G \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$ auf G gibt. f heißt <u>Potentialfunktion</u> (<u>Stammfunktion</u>) für $\vec{v}$ auf G.

Satz 3: Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) $\vec{v}$ ist Potentialfeld in G

(2) Für je zwei Punkte $\vec{r}_0, \vec{r}_1 \in G$ ist $\int\limits_{\gamma\, \vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unabhängig von der $\vec{r}_0$ mit $\vec{r}_1$ verbindenden stückweise glatten Kurve $\gamma \subset G$

(3) Für jede stückweise glatte geschlossene Kurve $\gamma \subset G$ gilt: $\oint\limits_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$.

Bemerkung zu (1) → (2): Ist f ein Potential für $\vec{v}$, so gilt

$$\int\limits_{\gamma\, \vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0).$$

Definition: Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach-zusammenhängend, falls jede geschlossene, doppelpunktfreie Kurve in G stetig auf einen Punkt in G zusammengezogen werden kann, ohne dass G verlassen wird.

(Beispiele. Bilder: Meyberg. Vachenauer Band 1)

Satz 4 Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld.

1) Ist $\vec{v}$ in G ein Potentialfeld, so gilt $J_{\vec{v}}(\vec{x}) = J_{\vec{v}}^T(\vec{x})$, $\vec{x} \in G$ ($\partial_j v_k(\vec{x}) = \partial_k v_j(\vec{x})$ $\forall \vec{x}$ $\forall j, k$)

2) Ist G einfach zusammenhängend und gilt in G $J_{\vec{v}} = J_{\vec{v}}^T$, so ist $\vec{v}$ in G ein Potentialfeld.

Bemerkungen: 1. $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ ist nicht einfach zusammenhängend. Für $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}$ gilt in G: $J_{\vec{v}} = J_{\vec{v}}^T$. $\vec{v}$ ist in G kein Potentialfeld, da $\oint\limits_{x^2+y^2=1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi \neq 0$.

2. Ist G bzgl $\vec{0}$ sternförmig: kann jeder Punkt $\vec{x} \in G$ mit $\vec{0} \in G$ geradlinig in G verbunden werden: und ist $\vec{v}$ in G ein Potentialfeld, so wird ein Potential durch

$$f(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{v}(t\vec{x}) \circ \vec{x}\, dt \text{ gegeben.}$$

21.5 Flächen im $\mathbb{R}^3$. Oberflächenintegrale

1. Darstellungen von Flächen im $\mathbb{R}^3$

<u>implizite Darstellung</u> $\quad F(x,y,z) = 0 \quad (*)$

<u>Beispiele</u>: $z - x^2 - y^2 = 0$, $z^2 - x^2 - y^2 = 0$

Normaleneinheitsvektor der durch $(*)$ gegebenen Fläche:

$$\vec{N}(x,y,z) = \pm \frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|}$$

<u>explizite Darstellung</u> $\quad z = f(x,y)$ oder $x = g(y,z)$ oder $y = h(x,z)$

<u>Beispiele</u>: $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 + y^2}$

Normaleneinheitsvektor: $\quad \vec{N}(x,y) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (D_1 f)^2 + (D_2 f)^2}} \begin{pmatrix} D_1 f \\ D_2 f \\ -1 \end{pmatrix}$

und analog

<u>Parameterdarstellung</u> $\quad \vec{r} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$

<u>Beispiele</u> $\quad \vec{r}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$, $0 \le \varphi \le \pi$, $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$

$$\vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le R$$

Normaleneinheitsvektor: $\quad N(u,v) = \frac{D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)}{\|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\|}$

$\vec{r}$ mit $\vec{r}(\mathcal{U}) = \mathcal{F}$ heißt <u>reguläres (glattes) Flächenstück im $\mathbb{R}^3$</u>, wenn $\vec{r} \in C^1(\mathcal{U})$ und $\operatorname{rang}(\vec{r}\,'(u,v)) = 2$ gelten.

$\operatorname{rang}(\vec{r}\,'(u,v)) = 2 \longleftrightarrow \vec{N}(u,v) \neq \vec{0} \quad \forall (u,v) \in \mathcal{U}$.

Es ist $\vec{N}$ stetig auf $\mathcal{U}$.

Eine Gleichung der Tangentialebene an $\mathcal{F}$ in $\vec{r}(u_0,v_0)$ ist:

$$\vec{\rho}(s,t) = \vec{r}(u_0,v_0) + s\,(D_1\vec{r})(u_0,v_0) + t\,(D_2\vec{r})(u_0,v_0), \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

---

2. Ist $\vec{r} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit $\vec{r}(\mathcal{U}) = \mathcal{F}$, so berechnet sich der Inhalt von $\mathcal{F}$ so:

$$\underline{I(\mathcal{F}) := \iint_{\mathcal{F}} do := \iint_{\mathcal{U}} \| D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) \| \, d(u,v)}$$

<u>$do = \| D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) \| \, d(u,v)$</u> wird als <u>skalares (Oberflächen)element von $\mathcal{F}$</u> und

<u>$d\vec{o} = (D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)) \, d(u,v) = \vec{N}\, do$</u> als <u>vektorielles Flächenelement von $\vec{r}$</u> bezeichnet.

Ist $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ stetig, so wird definiert:

$$\underline{\iint_{\mathcal{F}} f \, do := \iint_{\mathcal{U}} f(\vec{r}(u,v)) \, \| D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) \| \, d(u,v)}$$

Ist $\vec{w} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ stetig, so wird definiert

$$(*) \quad \underline{\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} = \iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N} \, do := \iint_{\mathcal{U}} \vec{w}(\vec{r}(u,v)) \cdot (D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)) \, d(u,v)}$$

Diese Integrale heißen Oberflächenintegrale von f bzw. $\vec{w}$ über $\mathcal{F}$.

$(*)$ heißt auch: <u>der Fluss von $\vec{w}$ durch $\mathcal{F}$</u> (in Richtung $\vec{N}$).

Beispiele:

1) Für $z = f(x,y)$, $(x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2$, wird

$$do = \sqrt{1 + \partial_1 f(x,y)^2 + \partial_2 f(x,y)^2}\, d(x,y)$$

2) $F(x, y, z) = 0$, $\partial_3 F(x,y,z) \neq 0$.

$\to$ $z = h(x,y)$, $(x,y) \in G$ $\to$ $F(x,y,h(x,y)) = 0$, $(x,y) \in G$

$$\to \quad do = \frac{1}{|\partial_3 F(x,y,h(x,y))|} \, \|\nabla F(x,y,h(x,y))\| \, d(x,y).$$

3) Inhalt von $K^+ = \{(x,y,z) \,/\, z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 < R^2\}$

$= \{(x,y,z) \,/\, x = R\cos\varphi\cos\vartheta,\ y = R\sin\varphi\cos\vartheta,$
$z = R\sin\vartheta,\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

Es ist $do = R\dfrac{d(x,y)}{\sqrt{R^2 - (x^2+y^2)}}$ und $do = R^2 \cos\vartheta \, d(\varphi, \vartheta)$

---

3. Variablensubstitution im Gebietsintegral

$\mathcal{U}^*, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ seien Gebiete. $\vec{\psi}: \mathcal{U}^* \to \mathcal{U}$ sei bijektiv, $\vec{\psi} \in C^1(\mathcal{U}^*)$, $\det \vec{\psi}'(\xi,\eta) > 0$ $((\xi,\eta) \in \mathcal{U}^*)$. $\vec{\psi}(\xi,\eta) = (u,v)^T$. $\vec{\psi}$ heißt Parametertransformation.

Satz 5 Es sei $f \in C^0(\mathcal{U})$. Es gilt

$$\iint_{\vec{\psi}(\mathcal{U}^*)} f(u,v)\, d(u,v) = \iint_{\mathcal{U}^*} (f \circ \vec{\psi})(\xi,\eta) \det \vec{\psi}'(\xi,\eta)\, d(\xi,\eta)$$

Satz 6 Es sei $\vec{\psi}$ wie oben. $\vec{r}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ sei ein reguläres Flächenstück. Dann ist $\vec{\rho} := \vec{r} \circ \vec{\psi}$ ein reguläres Flächenstück und $\vec{r}(\mathcal{U}) = \vec{\rho}(\mathcal{U}^*)$. Es gilt

$$\iint_{\vec{r}(\mathcal{U})} do = \iint_{\mathcal{U}} \|(\partial_1 \vec{r} \times \partial_2 \vec{r})(u,v)\|\, d(u,v) = \iint_{\mathcal{U}^*} \|(\partial_1 \vec{\rho} \times \partial_2 \vec{\rho})(\xi,\eta)\|\, d(\xi,\eta)$$