... Der Stokessche Integralsatz

V1) Es sei $\vec{r}: U^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, ein reguläres Flächenstück mit: $\vec{r} \in C^2(U^*)$ und $\vec{r}$ injektiv.
$F^* := \vec{r}(U^*)$ ist zweiseitig (orientierbar).

V2) Es sei $U \subset U^*$ ein Gebiet mit einer stückweise glatten einfach geschlossenen Randkurve ∂U. $F := \vec{r}(U) \subset F^*$ ist dann ein Flächenstück auf F^* mit der einfach geschlossenen stückweise glatten Randkurve $\partial F = \vec{r}(\partial U)$.

V3) $\vec{f}: F^* \to \mathbb{R}^3$ sei ein stetig diff'bares Vektorfeld.

Dann gilt:
$$\iint_F (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{o} = \oint_{\partial F} \vec{f} \cdot d\vec{s} \qquad (S)$$
$$\iint_F (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{N}\, do = \oint_{\partial F} \vec{f} \cdot \vec{T}\, ds$$

Zur Richtung von $\vec{T}$ und $\vec{N}$:
$\vec{w} = \vec{w}(t)$, $a \le t \le b$, sei Darstellung von ∂U
$\vec{\rho} = \vec{r}(\vec{w}(t))$, $a \le t \le b$, ist dann eine Darstellung von ∂F.
$\vec{T}_{\partial F}$ liegt damit fest. Es sei $P \in \partial F$ und E die Tangentialebene in P an F. $\vec{n}$ sei der in E bzgl F nach Außen gerichtete auf $\vec{T}$ senkrecht stehende Einheitsvektor. Es ist dann $\vec{N} = \vec{n} \times \vec{T}$.

Beispiele

1) $h(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^2$, $g(x,y,z) = x + y + z$

$F = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0\}$. $\vec{N}$ sei die Einheitsnormale auf F, die eine nichtnegative dritte Koordinate besitzt.

$J = \iint_F (\nabla h \times \nabla g) \cdot d\vec{o} = 3\frac{\pi}{2}$ mit $\nabla h \times \nabla g = \nabla \times (h \nabla g)$ und (S) oder mit $\iint\limits_F (\nabla h \times \nabla g)\cdot d\vec{o} = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=0}} (\nabla h \times \nabla g)\cdot d\vec{o}$

Begründung Satz von Stokes.

2) Sei $F = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ 0\le z\le h\}$ und $\vec{N}$ die nach Außen (bzgl. $x^2+y^2\le 1, 0\le z\le h$) gerichtete Einheitsnormale auf F. Mit

γ_1 : $x^2+y^2=1$, $z=0$, mathematisch positiv durchlaufen,

und

γ_2 : $x^2+y^2=1$, $z=h$, mathematisch negativ durchlaufen, gilt (mit Stokes Satz):

$$\iint\limits_F (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{N}\,do = \oint\limits_{\gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{s} + \oint\limits_{\gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{s}.$$

3) Ist $F = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$, so gilt mit (S):

$$\iint\limits_F (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{N}\,do = 0$$

Zerschneiden Sie F in zwei Teile mit gemeinsamer Randkurve, die für die verschiedenen Teile entgegengesetzt durchlaufen werden und bei der Addition Null ergeben.

21.7 3-fach Integrale

Es sei $G_0 = \{(x,y) \mid u(x)<y<v(x),\ a<x<b\}$

und $G = \{(x,y,z) \mid g(x,y)<y<h(x,y),\ (x,y)\in G_0\}$

mit $h, g \in C^0(\overline{G_0})$. ($G$ heißt in z-Richtung projizierbar)

Für $f \in C^0(\overline{G})$ wird definiert:

$$\iiint_G f\, d\tau := \iint_{(x,y)\in G_0} \left(\int_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) d(x,y)$$

Analog für in x-Richtung (y-Richtung) projizierbare Gebiete (vertausche oben die Variablen zyklisch:
$(x,y,z) \to (y,z,x) \to (z,x,y)$).

Für allgemeinere Bereiche $G \subset \mathbb{R}^3$ wird $\iiint_G f\, d\tau$

erklärt als Summe von Integralen über Bereiche G_j ($j=1,\dots,m$) mit $G = \bigcup_{j=1}^{m} G_j$, G_j und G_k haben für $j \neq k$ höchstens gemeinsame Randflächen, und die G_j gehören zu den projizierbaren Gebieten von oben.

Beispiele. Bemerkungen

1) Sind (mit den Bezeichnungen oben) h und g nichtnegativ, so gilt:

$$I(G) = (\text{Volumen von } G) = \iiint_G 1\, d\tau$$

2) $$\alpha(x_0) := \int_{y=u(x_0)}^{v(x_0)} \left(\int_{z=g(x_0,y)}^{h(x_0,y)} dz \right) dy \qquad (a \le x_0 \le b)$$

ist der Flächeninhalt des Schnittes von G mit der Ebene $x = x_0$.

Es gilt $$I(G) = \int_{x=a}^{b} \alpha(x)\, dx \quad \text{(Satz von Cavalieri)}$$

Das Volumen des (Rotations)körpers, den man erhält, wenn $\{(x,y) \mid 0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\}$ um die x-Achse rotiert, ist:

$$V_{rot} = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx .$$

3) Volumen der Pyramide mit den Ecken $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)$:

mit 1): $I = \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=0}^{1-x} \left(\int\limits_{z=0}^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx$

$= \frac{1}{6}$.

mit 2): $I = \int\limits_{x=0}^{1} \underbrace{\frac{1}{2}(1-x)^2}_{\alpha(x)} dx$

4) <u>Torusvolumen</u>: äußerer Radius $b+a$, innerer Radius $b-a$ $(0<a<b)$

(Parameterdarstellung: $\vec{r}(\rho,\psi,\varphi) = \begin{pmatrix} (b+\rho\sin\psi)\cos\varphi \\ (b+\rho\sin\psi)\sin\varphi \\ \rho\cos\psi \end{pmatrix}$,

$0\le\rho\le a,\ 0\le\psi\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$)

Rotation von $x^2+(y-b)^2 \le a^2$ um die x-Achse:

$$I = \pi \int\limits_{x=-a}^{a} \left((b+\sqrt{a^2-x^2})^2 - (b-\sqrt{a^2-x^2})^2 \right) dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

5) <u>Substitutionsregel für 3-fach Integrale</u>

$\vec{\psi}: G \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\psi}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sei C^1 und injektiv, es gelte $\det \vec{\psi}'(u,v,w) \neq 0$ für $(u,v,w) \in G$.

Dann:

$$\iiint\limits_{\vec{\psi}(G)} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{G} (f\circ\vec{\psi})(u,v,w)\, |\det \vec{\psi}'(u,v,w)|\, d(u,v,w)$$

Beispiele: (1) Für $\vec{\psi}(\underbrace{u,v,w}_{\vec{u}}) = A\vec{u} + \vec{b}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ fest, A konstante, reguläre $(3,3)$-Matrix

erhält man: $\iiint\limits_{\vec{\psi}(G)} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = |\det A| \iiint\limits_{G} f(A\vec{u}+\vec{b})\, d(u,v,w)$

(2) Für Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\varphi}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$

gilt $\det \vec{\varphi}'(r,\varphi,\vartheta) = r^2\cos\vartheta$. Man erhält mit

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für eine stetige Funktion $f : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ $(0 \le r_1 < r_2)$:

$$\iiint\limits_{r_1 \le \|\vec{x}\| \le r_2} f(\|\vec{x}\|)\, d(x,y,z) = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} f(r)\, r^2\, dr .$$

21.8 Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ (Divergenzsatz)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, das sich durch endlich viele Schnitte in Bereiche zerlegen lässt, die gleichzeitig in x-, y-, z-Richtung projizierbar sind. Die Oberfläche ∂G von G bestehe aus endlich vielen geschlossenen stückweise glatten orientierbaren Flächen. $\vec{N}$ bezeichne die aus allen regulären Oberflächenstücken aus G nach außen weisende Einheitsnormale auf ∂G. $\vec{v}$ sei ein in einer Umgebung von G definiertes C^1-Vektorfeld. Es gilt dann:

$$\iiint\limits_{G} (\nabla \cdot \vec{v})(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do .$$

Beispiele: 1) $\vec{v} \in C^2(G^*)$, $G^* \supset G$. $\displaystyle\iint\limits_{\partial G} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N}\, do = 0$

(siehe Beispiel 3) in 21.6)

2) Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet wie oben, es sei $\vec{0} \notin \partial G$.

Dann gilt $\displaystyle\iint\limits_{\partial G} \frac{\vec{x} \cdot \vec{N}}{\|\vec{x}\|^3}\, do = \begin{cases} 4\pi, & \text{falls } \vec{0} \in G \\ 0, & \text{falls } \vec{0} \notin G \end{cases}$