Kapitel 18 Fourierreihen

18.1 Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt <u>p-periodisch</u> und <u>p eine Periode von f</u>, falls <u>$f(x+p) = f(x)$</u> für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Es ist $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$.

<u>Bemerkungen</u>

1) Ist p eine Periode für f, so ist kp für jede Zahl $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine Periode. Eine Periode p ist o.B.d.A. positiv.

2) $\overset{q}{\text{Ü}}$: i) Ist $\varphi = \varphi(x)$ für $a < x \leq b$ gegeben, so setze φ etwa $(b-a)$-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort. ii) Setze (für $a>0$) φ periodisch so auf $\mathbb{R}$ fort, dass die Fortsetzung eine gerade (ungerade) Funktion ist.

3) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar und p-periodisch, so gelten für beliebiges $a \in \mathbb{R}$: $\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx$, $\int_{a-\frac{p}{2}}^{a+\frac{p}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\,dx$.

4) Ist $\omega: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ p-periodisch, so ist $\Omega: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\Omega(x) := \omega(\frac{p}{q}x)$, $x \in \mathbb{R}$, q-periodisch.

(3, 4) $\to$ 5) o.B.d.A. sind im folgenden die Funktionen 2π-periodisch und das Grundintervall ist $[-\pi, +\pi]$.

18.2 <u>Trigonometrische Polynome. Trigonometrische Reihen.</u>

<u>$T_N(t) := \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$</u> $(c_k \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R})$ heißt <u>trigonometr. Polynom vom Grade N</u>. T_N ist 2π-periodisch.

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} := \lim_{N \to \infty} T_N(t)$ heißt <u>trigonometrische Reihe</u>.

<u>Lemma 1:</u> <u>Es gilt $T_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$</u>

<u>mit $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$, $k = 0, 1, \dots, N$.</u>

$(\Rightarrow c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k),\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + i b_k),\ k = 1, 2, \dots, N)$

Es ist: $T_N(t) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow a_k, b_k \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow c_k = \overline{c}_{-k}$ ($\forall k$)

Def: des VR V:

$f \in V \overset{Def}{\Longleftrightarrow}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist 2π-periodisch, beschränkt und besitzt in $[-\pi, +\pi]$ höchstens endlich viele Unstetigkeit 1. Art.

Auf V wird ein Skalarprodukt wie folgt definiert:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)}\, dt \quad , f, g \in V$$

Die zugehörige Norm ist $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

Wir verwenden im weiteren die Bezeichnung $e_k(t)$ für e^{ikt} $(k \in \mathbb{Z})$.

Lemma 2: Die Funktionen e_k, $k \in \mathbb{Z}$, bilden in V ein Orthonormalsystem (ONS), d.h. es gilt $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj}$, $k, j \in \mathbb{Z}$.

Satz 1: Jedes trigonometrische Polynom

$$T_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

definiert auf $\mathbb{R}$ eine stetige, 2π-periodische Funktion ($\in V$). Es gelten:

$$c_k = \langle T_N, e_k \rangle, \quad |k| \leq N,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} T_N(t) \cos kt\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} T_N(t) \sin kt\, dt$$

$(k = 0, 1, 2, \dots, N)$.

Satz 2: Konvergiert $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e_k$ gleichmäßig auf $[-\pi,+\pi]$ gegen die Funktion f, so gelten:

1) f ist stetig und 2π-periodisch (auf $\mathbb{R}$)

2) $c_k = \langle f, e_k \rangle$ $(k \in \mathbb{Z})$.

18.3 Fourierreihen

Für $f \in V$ heißen die Zahlen $\langle f, e_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von f. Sie werden durch $\hat{f}(k)$ bezeichnet. Die Polynome $\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k$ $(N \in \mathbb{N})$ heißen Fourierpolynome von f und $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e_k$ heißt die Fourierreihe von f. Wir schreiben $(\mathcal{F}f)(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e_k(t)$ für die Fourierreihe von f.

Mit diesen Bezeichnungen sagt der Satz 2:
Eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe ist die Fourierreihe der durch sie dargestellten Funktion.

Satz 3: Aus $f, g \in V$, f, g stetig und $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ folgt $f(t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Satz 4: Ist $f \in V$ stetig und konvergiert die Fourierreihe $\mathcal{F}f$ von f gleichmäßig auf $[-\pi,+\pi]$, so gilt
$$f(t) = (\mathcal{F}f)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel: Es gilt $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx$, $-\pi \le x \le \pi$ $(*)$

bzw.: $$\left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}, \quad 0 \le x \le 2\pi. \qquad (**)$$

Für $x = 2\pi$ erhält man $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. $(***)$

Mit V_n ($n \in \mathbb{N}$) wird der VR der trigonometrischen Polynome vom Grade n bezeichnet: $T \in V_n \Leftrightarrow T = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$

Es gilt $V_n \subset V$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$). V_n ist Teilraum von V.

Wir definieren $P_n : V \to V_n$ (die orthogonale Projektion von V auf V_n) durch: $P_n f := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \quad , f \in V.$

Es gilt $f - P_n f \perp V_n$, d.h.: $\langle f - P_n f, e_j \rangle = 0$ für $-n \le j \le n$.

Lemma 3 (Minimumeigenschaft der Fourierpolynome)

$$\|f - P_n f\|_2 = \min\{\|f - T\|_2 \,,\, T \in V_n\} \quad , f \in V.$$

Mit $\|P_n f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \langle P_n f, f \rangle$ für $f \in V$

ergibt sich:

Lemma 4

Für $f \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\|f - P_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2$.

Definition: Die Folge $(f_n) \subset V$ konvergiert im quadratischen Mittel (in $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$) gegen f, falls $\lim_{n\to\infty} \|f - P_n f\|_2 = 0$ gilt.

Satz 5 ($\Leftarrow$ Lemma 4)

Für $f \in V$ gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \le \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Die Fourierreihe von $f \in V$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f genau dann, wenn die Parsevalsche Identität $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2$ gilt.

Folgerung mit $\hat{f}(0) = \frac{\alpha_0}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k)$, $\hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$

und $\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$,

und $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{|\alpha_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2)$ und

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \, dt :$$

<u>Riemannsches Lemma</u>: <u>Für $f \in V$ gelten</u>:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos kt \, dt = \lim_{k \to \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin kt \, dt = 0.$$

<u>Satz 6</u>: <u>Für jede Funktion $f \in V$ gilt die Parsevalsche Identität.</u>

<u>Beispiel</u>: Für $h(x) = \begin{cases} 1 & , -\pi \leq x < a - \pi \\ 0 & , a - \pi \leq x < \pi \end{cases}$ $\quad (a \in (0, 2\pi))$

mit der 2π-periodischen Fortsetzung f wird Satz 6 überprüft.

$f \in V$. Man rechnet nach: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos ka}{\pi^2 k^2}$

(Hier werden $\overline{(**)}$, $\overline{(***)}$ aus dem Beispiel im Anschluss an Satz 4 verwendet.) $\stackrel{!}{=} \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt$ ✓

<u>Beispiel</u>: (Ü) Verwendet man $\overline{(*)}$ aus diesem Beispiel (Satz 4), so ergibt die Parsevalsche Identität: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

<u>18.4</u> 1) Es sei $f \in V$ und $t \in [-\pi, +\pi]$. Der Grenzwert

$\lim_{\substack{x \to t \\ x < t}} \frac{f(x) - f(t-)}{x - t}$ heißt, falls er existiert, <u>linksseitige Ableitung von f in t</u>. Analog ist $\lim_{\substack{x \to t \\ x > t}} \frac{f(x) - f(t+)}{x - t}$

<u>die rechtsseitige Ableitung von f in t.</u>

2) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (vgl. HMI / T3(6)) gilt

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}} & , t \neq 2\pi m \\ \frac{1}{2\pi}(2n+1) & , t = 2\pi m \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Weiter hat man: $\int_{-\pi}^{+\pi} D_n(t)\,dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

und $D_n(t) = D_n(-t) \quad \forall t$ und die folgende Aussage:

Besitzt $f \in V$ in 0 eine rechts- und eine linksseitige Ableitung, so gilt: $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(0+) + f(0-))$.

(Hier wird das Riemannsche Lemma benötigt).

3) Es folgt schließlich der

Satz 7: $f \in V$ besitze in t sowohl eine linksseitige als auch eine rechtsseitige Ableitung. Dann gilt:

$$(\mathcal{F}f)(t) = \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)).$$

Folgerung: Ist f in t stetig, so gilt im Sinne punktweiser Konvergenz: $f(t) = (\mathcal{F}f)(t)$.