19. Kapitel Grundlagen der Linearen Algebra

19.1 1. Man beschäftige sich erinnernd mit Kapitel 8.

2. Es sei $(V,+,\cdot)$ ein komplexer VR. ("$\cdot$" bezeichnet die Skalare Multiplikation "$\cdot$": $\mathbb{C}\times V \to V$, $\{\lambda, v\} \to \lambda v$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $v\in V$)

Beispiele: 1) $C^0[0,1]$ = die auf $[0,1]$ definierten stetigen komplexen Fktn.

$+$: $f,g \in C^0[0,1] \to f+g \in C^0[0,1]$ mit
$$(f+g)(x) := f(x)+g(x),\ x\in[0,1].$$
$\cdot$: $\lambda\in\mathbb{C},\ f\in C^0[0,1] \to (\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ x\in[0,1].$

2) $\mathbb{C}^n$: $\vec{a}\in\mathbb{C}^n \iff \vec{a} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ mit $\alpha_j\in\mathbb{C}$ (Komponenten von $\vec{a}$)

"$+,\cdot$" werden komponentenweise definiert.

$$\vec{e}_j = (\delta_{\ell j})_{\ell=1,\dots,n} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-te Stelle} \\ \\ \\ \\ \end{array},\quad j=1,\dots,n, \text{ gehören zu } \mathbb{C}^n.$$

Man hat: $\vec{a} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j$.

3. Es sei V ein komplexer VR. $W(\neq\emptyset)\subset V$ heißt Teilraum (Unterraum) von V, falls erfüllt ist:
Aus $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ und $u,w\in W$ folgt $\lambda u+\mu w\in W$.

Beispiele: 1) Im $\mathbb{R}^n$ Gerade durch $\vec{0}$.

2) Im $\mathbb{R}^3$ Ebene, die $\vec{0}$ enthält.

3) In einem VR V die Menge der Linearkombinationen (LK) der Vektoren $v_1,\dots,v_k$: $\mathrm{Lin}(v_1,\dots,v_k)$.

$\mathrm{Lin}(v_1,\dots,v_k)$ heißt der von $v_1,\dots,v_k$ erzeugte (aufgespannte) Unterraum von V.

Es gilt für $V=\mathbb{C}^n$: $\mathbb{C}^n = \mathrm{Lin}(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$.

4. (<u>linear unabhängig</u> (l.u.), <u>linear abhängig</u> (l.a.))

Es sei V ein komplexer VR.

$a_1, \dots, a_m \in V$ heißen l.u., falls $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j = 0$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ möglich ist.

Sind $a_1, \dots, a_m$ nicht l.u., so heißen sie l.a..

<u>Beispiele. Bemerkungen.</u>

1) $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ in $\mathbb{C}^n$ sind l.u.

2) gilt $\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j a_j = 0$ und $\lambda_1 \neq 0$, so folgt

$$\mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_\ell) = \mathrm{Lin}(a_2, \dots, a_\ell) \quad (a_j \in \text{VR } V)$$

3) Eine Menge von Vektoren, zu der der Nullvektor gehört, ist l.a.

4) Sind $v_1, \dots, v_j$ $(\in V)$ l.a., so sind $v_1, \dots, v_j, v$ $(\in V)$ l.a.

Sind $v_1, \dots, v_j$ l.u., so sind $v_1, \dots, v_{j-1}$ l.u.

5. $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ heißt <u>Basis des VR V</u>, falls

1) $v_1, \dots, v_r$ l.u. sind und

2) $\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_r) = V$ gilt.

<u>Beispiele:</u> 1) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{C}^n$ — die <u>Standardbasis</u> oder <u>kanonische Basis</u> des $\mathbb{C}^n$

2) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis des $\mathbb{C}^3$.

3) $1, x, x^2, \dots, x^n$ ist eine Basis des VR $P_n(\mathbb{R})$ der Polynome mit maximalem Grad n.

Satz 1: $\{v_1, \dots, v_r\}$ ist eine Basis des VR V

$\longleftrightarrow$ jeder Vektor v lässt sich eindeutig durch $v_1, \dots, v_r$ darstellen: $v = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$.

Die Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ heißen die Koordinaten von v bezogen auf die Basis $v_1, \dots, v_r$.

Beispiel: Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ habe in der Standardbasis die Koordinaten $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. In der Basis (Beispiel 2, oben) $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ hat er die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Satz 2: Es sei V ein komplexer VR mit den Basen $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ und $\{v_1, \dots, v_m\}$. Dann gilt $n = m$.

Hat ein VR V eine Basis aus endlich vielen (n) Vektoren, so sagt Satz 2, dass dann jede Basis aus n Vektoren besteht. Diese gemeinsame Zahl heißt die Dimension von V, geschrieben: $\dim(V) = n$. Je $n+1$ Vektoren eines n-dimensionalen VR sind l. a. (Ü).

Ein VR V heißt unendlich dimensional, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ n l. u. Vektoren von V gibt.

Beispiel: $C^0[0,1]$ ist unendlich dimensional.

6. Erinnerung: Skalarprodukt

Eine Funktion $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$)

heißt Skalarprodukt auf dem komplexen (reellen) VR V, falls erfüllt sind: **S1** $\langle u_1 + u_2 , v \rangle = \langle u_1 , v \rangle + \langle u_2 , v \rangle$

$\langle \alpha u , v \rangle = \alpha \langle u , v \rangle$ $\left(\begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{C} \ (\mathbb{R}) \\ u_1, u_2, u, v \in V \end{array} \right)$

S2 $\langle u , v \rangle = \overline{\langle v , u \rangle}$, $u, v \in V$

S3 $\langle u , u \rangle > 0$ für alle $u \in V$, $u \neq 0$.

Beispiele 1) Im $\mathbb{R}^3$ wird durch $\langle \vec{x} , \vec{y} \rangle := \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \eta_j$

mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ ein Skalarprodukt definiert.

2) Im $\mathbb{C}^n$ ist $\langle \vec{x} , \vec{y} \rangle := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \overline{\eta_j}$ ein Skalarprodukt.

3) Im $C^0[0,1]$ (komplexwertig) ist z. B. durch

$$\langle f , g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} \, dx$$ ein Skalarprodukt

gegeben.

Ein komplexer (reeller) VR mit einem Skalarprodukt heißt unitärer (euklidischer) VR.

7. Eine Norm auf einem komplexen VR ist eine Funktion $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

N1 $\| v \| \geq 0$ $\forall v \in V$ und $\| v \| = 0$ nur für $v = 0$

N2 $\| \alpha v \| = | \alpha | \| v \|$ $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$

N3 $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ $u, v \in V$

In einem (unitären, euklidischen) Raum $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ ist durch $\sqrt{\langle v , v \rangle}$, $v \in V$, eine Norm gegeben. (Üa).