Für jede Transposition τ gilt: $\tau^2 = id$ oder $\tau = \tau^{-1}$.

Satz 1 Jede Permutation $\sigma \in S_n$ kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden: $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$.

Beispiel: $\sigma \in S_5$: $(5, 3, 4, 1, 2) = (1\ 5) \circ (2\ 3) \circ (3\ 4) \circ (4\ 5)$
$= (1\ 2) \circ (2\ 4) \circ (2\ 3) \circ (1\ 5)$.

Definition
(j, k) (mit $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$) heißt Fehlstand der Permutation $\sigma \in S_n$, falls $j < k$ aber $\sigma(j) > \sigma(k)$ ist. Mit $f(\sigma)$ wird die Anzahl der Fehlstände von σ bezeichnet.

Satz 2 Für $\sigma \in S_n$ und $\tau = (j\ k) \in S_n$ gilt:

$$f(\tau \circ \sigma) - f(\sigma) = 2l+1 \quad (l \in \mathbb{Z}) \quad \text{(ungerade)}.$$

Satz 3 Jede Zerlegung von $id \in S_n$ in ein Produkt von Transpositionen besteht aus einer geraden Anzahl von Transpositionen.

Satz 4 Eine Permutation $\sigma \in S_n$ kann nicht gleichzeitig als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen und als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden.

Definition: Für $\sigma \in S_n$ sei $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k$ eine Zerlegung in ein Produkt von Transpositionen. Die nach Satz 4 σ eindeutig zugeordnete Zahl $(-1)^k$ heißt Vorzeichen von σ, geschrieben $\mathrm{sign}(\sigma)$.
Ist $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$, so heißt σ gerade, andernfalls ungerade.

Satz 5 : a) $\operatorname{sign}(\tau) = -1$ für jede Transposition $\tau \in S_n$.

b) $\operatorname{sign}(\sigma \circ \varphi) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\varphi)$, $\sigma, \varphi \in S_n$

c) $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$, $\sigma \in S_n$

d) $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{f(\sigma)}$, $\sigma \in S_n$.

---

2) Determinanten

Die Determinante ist eine Funktion

$$\det : \mathbb{C}^{(n,n)} \to \mathbb{C},$$

die die folgenden Eigenschaften hat:

$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ wird in Spaltenform $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]$ gegeben. $\det(A)$ ist dann eine Funktion der Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ mit:

det 1 $\quad \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1$

det 2 $\quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ ist linear in jeder Spalte, d.h.

für $j = 1, 2, \dots n$ ist $f_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mit

$$f_j(\vec{x}) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{x}, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n) \text{ linear}$$

det 3 $\quad$ Ist $\tau = (j\ k) \in S_n$, so gilt

$$\det(\vec{a}_{\tau(1)}, \vec{a}_{\tau(2)}, \dots, \vec{a}_{\tau(j)}, \dots, \vec{a}_{\tau(k)}, \dots, \vec{a}_{\tau(n)})$$

$$= -\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \operatorname{sign}(\tau)\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).$$

Folgerungen aus $\underline{\det 1}$, $\underline{\det 2}$, $\underline{\det 3}$: $A=(\alpha_{jk}) \in \mathbb{C}^{(n,n)}$, $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$:

$\underline{A1}$ Für $\sigma \in S_n$ gilt $\det(\vec{a}_{\sigma(1)}, \vec{a}_{\sigma(2)}, \dots, \vec{a}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma) \det(A)$

$\underline{A2}$ $\det(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma)$

$\underline{A3}$ $\det(A) = 0$, falls zwei Spalten von A gleich sind

$\underline{A4}$ Entsteht B aus A, indem zu einer Spalte das Vielfache einer anderen Spalte addiert wird, so gilt
$$\det(A) = \det(B).$$

$\underline{A5}$ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$\underline{A6}$ $\underline{\text{Satz 1}}$ $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \cdots \alpha_{\sigma(n)n}$.

$\underline{\text{Beispiel}}$: $\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n2} & & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

$\underline{A7}$ $\underline{\text{Satz 2}}$ $\det(A) = \det(A^T)$

Folgerungen: 1) $\underline{A3}$, $\underline{A4}$ gelten, wenn überall "Spalte" durch "Zeile" ersetzt wird.

2) $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$.

$\underline{A8}$ $\underline{\text{Satz 3}}$ $\underline{\text{(Det-Multiplikationssatz)}}$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$$

$\underline{A9}$ $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist regulär $\longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

A10 Satz 4 (Der Entwicklungssatz)

Für $k = 1, 2, \ldots, n$ gelten

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} (-1)^{j+k} \det(A_{jk}) \qquad \underline{(1)}$$

und

$$\det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{k\ell} (-1)^{\ell+k} \det(A_{k\ell}) \qquad \underline{(2)},$$

wobei ist A_{jk} die $(n-1, n-1)$-Matrix, die aus A durch Weglassen der j-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht.

($\underline{(1)}$ ($\underline{(2)}$) heißt Entwicklung von $\det(A)$ nach der k-ten Spalte (k-ten Zeile).

Es gilt: $(-1)^{k+j} \det(A_{jk}) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{e}_j, \vec{a}_{k+1}, \ldots \vec{a}_n)$)

A11 Ist $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ die Matrix mit den Spalten $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, so ist $\underline{\operatorname{adj}(A) \in \mathbb{C}^{(n,n)}}$ (die "Adjunkte" von A) die Matrix mit den Elementen

$$(\operatorname{adj}(A))_{k\ell} = (-1)^{k+\ell} \det(A_{\ell k}) \quad (\ell, k = 1, \ldots, n)$$

$$= \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{e}_\ell, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) \quad (k, \ell = 1, \ldots, n)$$

Satz 5 $\underline{\operatorname{adj}(A) A = \det(A) E_n}$

Folgerung: Ist A regulär, so gilt $\underline{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)}$.

Folgerung:

A12 (Cramersche Regel) Ist $A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ regulär und $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ gegeben. So ist $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \vec{e}_k$ mit $A\vec{x} = \vec{y}$ gegeben durch:

$$\underline{\xi_k = \frac{1}{\det(A)} \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{y}, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n),}$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$

19.7 Orthogonale Matrizen

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt orthogonal, falls $A^T A = E$ erfüllt ist.

1. Es gelten:

A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A^T$ ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1}$ ist orthogonal $\Leftrightarrow$ Die Spaltenvektoren von A bilden eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ Die Zeilenvektoren von A bilden eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$.

2. Ist A orthogonal, so gilt $|\det(A)| = 1$.

3. Sind A und B orthogonale Matrizen, so ist AB orthogonal.

4. Aus $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und AB orthogonal und B orthogonal folgt, dass A orthogonal ist.

5. A ist orthogonal $\Leftrightarrow$ Ist $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$, so ist auch $A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \quad \vec{x}^T \vec{y} = (A\vec{x})^T A\vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \quad \|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \quad \|A\vec{x} - A\vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

6. Satz (7.2ii)

Eine orthogonale $(2,2)$-Matrix O hat eine der beiden Formen: $D = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ oder $S = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$.

Hierbei sind $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$.

(d.h. es gibt Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit $c = \cos\varphi, s = \sin\varphi$).