9.8 Eigenwerte (EW), Eigenvektoren, Diagonalisieren von Matrizen.

Def: Es sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt <u>EW von A</u>, wenn $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o}$ nichttriviale Lösungen $\vec{x}$ besitzt. $\vec{x} \in \mathrm{Kern}(A - \lambda E) \setminus \{\vec{o}\}$ heißt <u>Eigenvektor (EV) zum EW λ</u>.

$E(\lambda) = \mathrm{Kern}(A - \lambda E)$ heißt <u>Eigenraum zum EW λ</u>

$\dim E(\lambda) = n - \mathrm{rang}(A - \lambda E)$ heißt <u>geometrische Vielfachheit des EW λ</u>.

1. λ ist EW von A $\iff$ $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E) = 0$

2. (1) $$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj}\Big)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} c_k \lambda^k + \lambda^0 \det(A)$$

ist <u>ein Polynom n-ten Grades in λ</u>.

Es besitzt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ $(1 \le k \le n)$ verschiedene Wurzeln mit den Vielfachheiten $m_1, m_2, \ldots, m_k$ $\left(m_j \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{k} m_j = n\right)$. D.h.:

(2) $$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$$

Die Zahlen $m_1, \ldots, m_k$ heißen in diesem Zusammenhang auch <u>algebraische Vielfachheiten</u> von $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

3. Durch Vergleich von (1), (2) erhält man:

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{m_j}$$ (A ist singulär $\iff$ ein EW von A ist 0)

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} = \sum_{j=1}^{k} m_j \lambda_j .$$

4. Satz 1: Für jeden EW λ von $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gilt für die geometrische Vielfachheit $\gamma(\lambda)$ und die algebraische Vielfachheit $m(\lambda)$: $1 \le \gamma(\lambda) \le m(\lambda)$.

5. Beispiele:

1) Eine reelle Matrix braucht keine reellen EW und EV zu haben:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1/2} = \pm i$$

$$E(i) = \left\{ t \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad E(-i) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Für
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
hat man: $\lambda = 0$, $m = 5$, $\gamma = 1$

3) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ hat die verschiedenen EW
$$\lambda_1 = 2, \ m_1 = m(\lambda_1) = 2, \ \gamma_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 7, \ m_2 = 1, \ \gamma_2 = 1$$

$$E(2) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E(7) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

6. Satz 2: Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ habe die verschiedenen EW $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ mit zugehörigen EV $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. Dann sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ l. u.

Folgerung: Hat eine (n,n)-Matrix n verschiedene EW, so bilden die zugehörigen EV eine Basis des $\mathbb{C}^n$.

Satz 3: Eine (n,n)-Matrix hat maximal n l. u. EV. Sie hat genau dann n l. u. EV, wenn für jeden EW die geometrische und die algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

7. $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißen ähnlich, falls es eine reguläre Matrix C derart gibt, dass $B = C^{-1} A C$ gilt.

Satz 4 Ähnliche Matrizen A, B haben dasselbe charakteristische Polynom: $\chi_A = \chi_B$. Es gelten $\det(A) = \det(B)$, $\mathrm{spur}(A) = \mathrm{spur}(B)$; A, B haben dieselben EW.

8. $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt diagonalisierbar, falls A zu einer Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = [\mu_1 \vec{e}_1, \mu_2 \vec{e}_2, \dots, \mu_n \vec{e}_n]$ ähnlich ist.

Satz 5 Es sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ diagonalisierbar zu $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ mit der regulären Matrix $C = [\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n]$.
Dann gelten:
1. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sind die EW von A
2. $A \vec{c}_k = \mu_k \vec{c}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

(die Spalten von C sind EV von A)

Satz 6 $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist diagonalisierbar
$\Longleftrightarrow$ A besitzt n l. u. EV
$\Longleftrightarrow$ für jeden EW von A stimmen die algebraische und die geometrische Vielfachheit überein.

Beispiele: 1) (5. 3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ wird etwa mit $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ diagonalisiert.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ kann mit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ diagonalisiert werden.

9. Satz 7. Es sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ hermitesch: $A = A^*$.

Es gelten: a) Alle EW von A sind reell.

b) Sind λ, μ EW mit $\lambda \neq \mu$ mit den EV $\vec{x}, \vec{y}$, so gilt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ $(= \vec{y}^* \vec{x}) = 0$

(EV zu verschiedenen EW sind orthogonal)

c) A besitzt ein ONS von n EV.

d) A ist mit einer unitären Matrix C diagonalisierbar zu D: $C^* A C = D$.

Satz 8 (in Satz 7 enthalten)

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ symmetrisch, so lässt sich A mit einer orthogonalen Matrix C diagonalisieren:

$$C^T A C = D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$