19.9 Definitheit von Matrizen

$A = A^T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ wird die quadratische Form $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(\vec{x}) := \vec{x}^T A \vec{x}$ zugeordnet.

Definition: A heißt positiv definit, falls $Q(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ gilt

positiv semidefinit, falls $Q(\vec{x}) \geq 0 \quad \forall \vec{x}$ gilt

A heißt negativ (semi)definit, falls $-A$ positiv (semi)definit ist.

A heißt indefinit, falls es $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $Q(\vec{u}) > 0$ und $Q(\vec{v}) < 0$.

Satz 9 Es sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $A = A^T$. Es gelten:

1. A ist positiv definit $\Longleftrightarrow$ alle EW sind positiv
2. A ist positiv semidefinit $\Longleftrightarrow$ alle EW sind nicht negativ
3. A ist indefinit $\Longleftrightarrow$ es gibt einen positiven und einen negativen EW

Satz 10 Die (2,2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \neq 0$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$ ist

1. positiv definit $\Longleftrightarrow$ $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$
2. negativ definit $\Longleftrightarrow$ $a < 0$ und $ac - b^2 > 0$
3. positiv semidefinit $\Longleftrightarrow$ $ac - b^2 \geq 0$ und $a + c \geq 0$
4. indefinit $\Longleftrightarrow$ $ac - b^2 < 0$.

19.10 Hauptachsentransformation

Mit $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $A = A^T$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ wird
$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c$
untersucht.

Die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\vec{x}) = 0\}$ heißt Quadrik.
Im Fall $n = 2$ sind das die Kegelschnitte, im Fall $n = 3$ die Flächen 2. Grades.

<u>Satz:</u> <u>$h(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c$ lässt sich durch eine Transformation $\vec{x} \to \vec{y} = C^T(\vec{x} - \vec{m})$, $\vec{y} \to \vec{x} = C\vec{y} + \vec{m}$ mit einer orthogonalen Matrix C (Drehung) und einem Vektor $\vec{m}$ (Verschiebung) in eine der folgenden Normalformen transformieren (aus der man die Gestalt von $h(\vec{x}) = 0$ ablesen kann):</u>

$$\underline{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j^2 + c_0 = h(C\vec{y} + \vec{m})} \quad , \ r = \text{rang}(A)$$

$$\underline{\sum_{j=1}^{r} \lambda_j y_j^2 + \sum_{j=r+1}^{n} \beta_j y_j = h(C\vec{y} + \vec{m})} \quad , \ r = \text{rang}(A) < n.$$

<u>Bemerkungen:</u>

1) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind die EW von A, die von Null verschieden sind.
2) C ist die Matrix, mit der diagonalisiert wird.
3) Im Fall $r = n$ heißt $\vec{m}$ Mittelpunkt der Quadrik $h(\vec{x}) = 0$.

<u>Beispiele:</u> 1) $x_1^2 - 2\sqrt{3}\, x_1 x_2 + 3x_2^2 + 8\sqrt{3}\, x_1 - 8x_2 - 4 = 0$
(Parabel)

2) $x_1^2 - x_2 x_3 - 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4 = 0$

3) Ü.blatt, Aufgaben 5, 6.

Kapitel 20 — Mehrdimensionale Differentialrechnung

20.1. Stetigkeit

1) Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet im folgenden:

$$\|\vec{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{\,2}\right)^{1/2}, \text{ wobei } \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j \text{ ist}$$

Def: Die Folge $(\vec{x}^{\,k})_k \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^{\,k} = (x_j^k)_{j=1,\dots,n}$, konvergiert für $k \to \infty$ gegen $\vec{x} = (x_j)_j \in \mathbb{R}^n$, falls gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \|\vec{x}^{\,k} - \vec{x}\| = 0$.

A1 (8.ü/A8) $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{\,k} = \vec{x}$ gilt genau dann, wenn $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^k \to x_j$ für $j = 1,\dots,n$ richtig ist.

2) $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ seien gegeben. Die Menge $B(\vec{x},\delta) := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{y}-\vec{x}\| < \delta\}$ heißt offene Kugel um $\vec{x}$ mit dem Radius δ.

$\overline{B}(\vec{x},\delta) = \{\vec{y} \mid \|\vec{y}-\vec{x}\| \le \delta\}$ heißt abgeschlossene Kugel.

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offene Menge, falls es zu jedem $\vec{x} \in D$ eine Kugel $B(\vec{x},\delta_{(\vec{x})}) \subset D$ gibt.

3) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. $\vec{f}$ heißt in $\vec{x} \in D$ stetig, falls für jede Folge $(\vec{x}^{\,k})_k \subset D$ mit $\vec{x}^{\,k} \to \vec{x}$ $(k\to\infty)$ gilt: $\vec{f}(\vec{x}^{\,k}) \to \vec{f}(\vec{x})$ $(k\to\infty)$.