Für $\vec{f}(\vec{x}^k) \to \vec{f}(\vec{x})$, $(k \to \infty)$ für jede Folge $(\vec{x}^k)_k \subset D$ mit $\vec{x}^k \to \vec{x}$ $(k \to \infty)$ schreiben wir auch:

$$\lim_{\substack{\vec{y} \to \vec{x} \\ \vec{y} \in D}} \vec{f}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{x}).$$

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \vec{x} \in D \ , \ f_j : D \to \mathbb{R}.$$ Die

f_j sind die Koordinaten (Komponenten)funktionen von $\vec{f}$.

<u>A2</u> <u>$\vec{f}$ ist in $\vec{x} \in D$ stetig $\Longleftrightarrow$ f_j ist in $\vec{x}$ stetig für $j = 1, \dots, m$.</u>

<u>Beispiele</u>:

1) $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ konst; $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, ist stetig für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

2) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$ ist stetig für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist in $(0,0)$ unstetig. Diese Unstetigkeit ist nicht hebbar.

4) $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{f}(x,y) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^T,$ $(x,y) \neq (0,0)$

$\vec{f}$ ist in $(0,0)$ durch $\vec{f}(0,0) = \vec{0}$ stetig fortsetzbar.

20.2 Kurven im $\mathbb{R}^n$

1) Def: Eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n, \quad t \to \vec{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$$

eines Intervalls I.

$\vec{r}$ heißt (stetig) diff'bar in $t_0 \in I$, falls alle Koordinatenfunktionen in t_0 (stetig) diff'bar sind. Die Menge $\vec{r}(I)$ heißt Spur von $\vec{r}$.

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ heißt Parameterdarstellung der Kurve.

Bemerkungen:

1. Zu einer Kurve gehört wesentlich der durch die Abbildung $\vec{r}$ vermittelte "Zeitplan" der Durchlaufung der Spur, u. eine Orientierung.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \vec{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

sind verschiedene Kurven mit derselben Spur.

Auch $\quad \vec{w}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, -1 \le t \le 1,$ hat dieselbe Spur wie $\vec{r}$ für $0 \le t \le \pi$ und $\vec{\rho}$ für $\pi \le t \le 2\pi$.

2. Ist $I = [a, b]$ und $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, so ist die Kurve geschlossen; ($\vec{r}(a)$ = der Anfangspunkt) = ($\vec{r}(b)$ = der Endpunkt). Ein Punkt $\vec{r}_1$ mit $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) = \vec{r}_1$ für $t_1 \neq t_2$ heißt Doppelpunkt von $\vec{r}$. Eine Kurve ohne Doppelpunkte heißt einfach, $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ ist dann injektiv. Ist die Kurve geschlossen und $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ der einzige Doppelpunkt, so heißt $\vec{r}$ geschlossene Jordankurve.

2) Es sei $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ eine diff'bare Kurve, $t_0 \in I$.

$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}_1(t_0), \ldots, \dot{x}_n(t_0))^T$ heißt <u>der Tangentialvektor</u> oder <u>der Geschwindigkeitsvektor</u> der Kurve an der Stelle t_0 und $\|\dot{\vec{r}}(t_0)\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j(t_0)^2 \right)^{1/2}$ <u>die Geschwindigkeit</u> von $\vec{r}$ in t_0.

<u>Def.</u>: Eine C^1-Kurve $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>regulär (glatt)</u> an der Stelle $t_0 \in I$, wenn $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$ gilt.

<u>Beispiele</u>: a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $-1 \le t \le 1$, ist glatt in $t=0$

$\vec{\tilde{r}}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $-1 \le t \le 1$, ist in $t=0$ nicht glatt

Es gilt $\vec{r}([-1,+1]) = \vec{\tilde{r}}([-1,+1])$.

b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, ist nicht regulär für $t=0$.

Die Spur hat in $\vec{r}(0) = \vec{0}$ eine Spitze.

c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\dot{\vec{r}}(t_k) = \vec{0}$ für $t_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Spur hat in $\vec{r}(t_k) = \begin{pmatrix} 2\pi k \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$, Spitzen.

d) Der Graph einer C^1-Funktion $y = f(x)$, $x \in I$, ist mittels $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$, $t \in I$, eine reguläre Kurve.

e) (Schraubenlinie) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ kt \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ $(a>0, k>0)$

$\vec{r}$ ist eine glatte Kurve

3) <u>Bogenlänge</u>

Eine stetige Kurve $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>rektifizierbar</u>, wenn die Menge der Längen aller einbeschriebenen Sehnenpolygone beschränkt ist. Ist das der Fall, so heißt das Supremum aller dieser Längen <u>die Länge von $\vec{r}$: $L(\vec{r})$.</u>

<u>Satz 1</u>: <u>Eine C^1-Kurve $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und hat die Länge</u>

$$L(\vec{r}) = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt.$$

<u>Beispiele</u>: a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le \pi$: $L(\vec{r}) = \pi$

b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$: $L(\vec{r}) = 8$

c) $\vec{r}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \ge 0$: $L(\vec{r}) = \sqrt{2}$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt$$

d) $\vec{r}(t) = (1+e^{-t}) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \ge 0$:

$$L(\vec{r}) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt > \lim_{T\to\infty} \int_0^T dt$$

$L(\vec{r})$ existiert nicht. $\vec{r}$ ist nicht rektifizierbar.

---

4) <u>Parameterwechsel</u>:

$I, J \subset \mathbb{R}$ seien Intervalle. Eine C^k-Abbildung $g: I \to J$, $\tau = g(t)$, heißt eine <u>C^k-Parametertransformation</u>, falls g bijektiv und $g^{-1} \in C^k(J)$ ist.

Es sei $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann ist

$$\vec{\rho} := \vec{r} \circ g^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$$ eine Kurve mit derselben Spur wie $\vec{r}$. $\vec{\rho}$ heißt <u>Umparametrisierung</u>

Ist $g \nearrow$ (streng) ($g' > 0$), so heißt g <u>orientierungserhaltend</u>, ist $g \searrow$ (streng) ($g' < 0$), so heißt g <u>orientierungsumkehrend</u>.

<u>Beispiele</u>: 1) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 < t < \pi$ wird mittels

$\tau = g(t) = -\cos t$ orientierungserhaltend umparametrisiert zu $\vec{\rho}(\tau) = \begin{pmatrix} -\tau \\ \sqrt{1-\tau^2} \end{pmatrix}$, $-1 < \tau < +1$.

2) $\vec{\rho}$ sei Umparametrisierung von $\vec{r}$. Dann: Die Tangenten in $\vec{r}(t)$ und $\vec{\rho}(g(t))$ sind dieselben. Die Tangentialvektoren sind im Fall $g' > 0$ gleichgerichtet, im Fall $g' < 0$ entgegengesetzt gerichtet.

3) <u>Satz 2</u>: Es sei $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(g^{-1}(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, die Umparametrisierung von $\vec{r}$ mittels $g \in C^1$. Es gilt:

$$\left(\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \right) L(\vec{r}) = L(\vec{\rho}) \left(= \int_\alpha^\beta \|\vec{\rho}\,'(\tau)\| d\tau \right)$$

4) Ist $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so wird durch $\vec{r}^{\,-} : [-b, -a] \to \mathbb{R}^n$, $\vec{r}^{\,-}(t) := \vec{r}(-t)$, $-b \le t \le -a$, eine zu $\vec{r}$ entgegengesetzt durchlaufene Kurve definiert.

5) $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei eine reguläre Kurve.

$$g : [a, b] \to [0, L(\vec{r})], \quad s := g(t) = \int_a^t \|\dot{\vec{r}}(\sigma)\| d\sigma, \; a \le t \le b$$

ist eine orientierungserhaltende C^1-Parametertransformation. $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s) = \vec{r}(g^{-1}(s))$, $0 \le s \le L(\vec{r})$, heißt <u>die natürliche Darstellung der Kurve $\vec{r}$</u>. s heißt der Parameter der Bogenlänge. Die Darstellung bzgl. der Bogenlänge ist durch die konstante Geschwindigkeit 1 gekennzeichnet: $\|\vec{\rho}\,'(s)\| = 1, \forall s$.

20.3 Richtungsableitung. Partielle Ableitung.

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : D \to \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0 \in D$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ gegeben.

Def: Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(g(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - g(\vec{x}_0)\right)$, so wird er Richtungsableitung von g in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$ genannt. Er wird durch $(D_{\vec{v}}\, g)(\vec{x}_0)$ bezeichnet.

$(D_{\vec{v}}\, g)(\vec{x}_0)$ gibt die Änderungsgeschwindigkeit der Funktionswerte von g in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$ an:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \vec{x}_0 + t\vec{v} \\ g(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \end{pmatrix}$ ist eine Kurve im $\mathbb{R}^{n+1}$

auf der "Fläche" $x_{n+1} = g(x_1, \dots, x_n) = g(\vec{x})$. Es gilt:

$\dot{\vec{r}}(0)$ (= Tangentialvektor in $\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ g(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$) $= \begin{pmatrix} \vec{v} \\ (D_{\vec{v}}\, g)(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$.

Ist $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$, $\vec{x} \in D$,

und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, so wird $D_{\vec{v}}\vec{f}$ komponentenweise definiert:
$$(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}) = \begin{pmatrix} (D_{\vec{v}} f_1)(\vec{x}) \\ \vdots \\ (D_{\vec{v}} f_m)(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \in D.$$

Beispiele: 1) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$(D_{\vec{v}} f)(\vec{x}) = 2\vec{x}^T\vec{v}$, $(D^2_{\vec{v}} f)(\vec{x}) = D_{\vec{v}}(D_{\vec{v}} f)(\vec{x}) = 2\|\vec{v}\|^2$

2) $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ konstant.

$(D_{\vec{v}} f)(\vec{x}) = A\vec{v}$.