

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1 Wie muss man den Radius r und die Höhe h einer zylindrischen Konservendose wählen, damit diese ein vorgegebenes Volumen $V = \pi r^2 h$ besitzt und zugleich möglichst wenig Blech (Fläche $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$) verbraucht wird?

Aufgabe H2 Untersuchen Sie jeweils, ob die Regel von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin(x) \cos(x)$ und $g(x) := f(x)e^{\sin x}$

Aufgabe H3 Für eine physikalische Größe werden n Messwerte a_1, \dots, a_n bestimmt. Als Messergebnis gibt man dann die Zahl a an, die durch

$$f(a) = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad \text{wobei} \quad f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2,$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a . Was ergibt sich, wenn man stattdessen die Funktion $g(x) = |x - a_1| + \dots + |x - a_n|$ minimiert?

Aufgabe H4 Gesucht ist eine zweimal differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$y'' = -\omega^2 y, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0,$$

wobei ω und y_0 gegebene reelle Zahlen sind.

- (a) Bestimmen Sie eine solche Funktion, indem Sie den Ansatz machen, y lasse sich als Potenzreihe darstellen.
- (b) Mittels des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ zeige man, daß y sich in der Form $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ darstellen lässt und bestimme die Konstanten c_1 und c_2 .
- (c) Man vergleiche die Ergebnisse aus (a) und (b).

Aufgabe T1 Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

auf zwei verschiedene Arten: Mittels Potenzreihen und mit der Regel von de l'Hospital.

Aufgabe T2 Aus einem Rechteck und einem Halbkreis wird ein aufrechtes Rundbogenfenster des Umfangs $L > 0$ gebildet. Wie müssen die Höhe x und die Breite $2r$ des Rechtecks gewählt werden, damit die Gesamtfläche des Fensters maximal wird? Hinweis: machen Sie eine Skizze!

Aufgabe T3 a) Bestimmen Sie Zahlen a , b und c , für die gilt:

$$|\ln(2+x) - a - bx| \leq cx^2 \quad \text{für alle } x \in [-1, 1]$$

b) Berechnen Sie eine Näherung für $\sqrt{2}$ mit einem Fehler kleiner als 10^{-6} unter Verwendung eines geeigneten Taylorpolynoms und der Darstellung $\sqrt{2} = \frac{10}{7}(1 - \frac{1}{50})^{1/2}$.

Aufgabe T4 Betrachten Sie die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + 2$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion ihr Maximum in genau einer Stelle ξ annimmt.

b) Zur numerischen Nullstellenberechnung einer Funktion $g(x)$ wird häufig das Newtonverfahren $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, das für $\left| \frac{g(x) \cdot g''(x)}{g'(x)^2} \right| \leq q < 1$, konvergiert und die Fehlerabschätzung $|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|$ besitzt, eingesetzt. Berechnen Sie eine Näherung für ξ aus (a) durch zwei Iterationen des Newtonverfahrens, beginnend bei $x_0 = 0$, und schätzen Sie den verbleibenden Fehler ab.

c) Geben Sie eine weitere Iterationsvorschrift an, die für beliebige Startwerte aus $[-1, 1]$ eine gegen ξ konvergente Folge liefert.

Hinweis: Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.

Informationen zur 2.Übungsklausur:

- Die Klausur findet am **Samstag**, den **03.02.2007** von **08.00-10.00 Uhr** statt.
- Es ist **keine Anmeldung** mehr erforderlich.
- **Hörsaalverteilung:**

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
Physik/Chemie	(A-K)	HMU
Physik/Chemie	(L-Z)	HMO
ETEC/Geodäsie	(A-Z)	Audimax

- Die Klausuren können ab Dienstag, den 13.02.2007 im Sekretariat (Zi.312) abgeholt werden. Am Mittwoch, den 14.02.2007 findet von 13.15-13.45 Uhr im S 31 eine Meckerstunde statt.
- Zu den Klausuren mitzubringen sind Studenausweis und Schreibgerät; Papier wird gestellt.
- Zulässige Hilfsmittel sind alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z. B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren). Nicht zugelassen sind einzelne Blätter und elektronische Hilfsmittel (z.B. Laptops, Taschenrechner, Mobiltelefone,...).