

14. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1 Die Bernoullische Zahlen B_k sind durch $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$ definiert. Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die B_k . (Hinweis: betrachten Sie die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$).

Aufgabe H2 Es sei $\beta > 0$. Berechnen Sie die Integrale

$$I_n := \int_0^{\beta} x^n e^{-x} dx \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

und bestimmen Sie dann den Grenzwert $\lim_{\beta \rightarrow \infty} I_n$.

Aufgabe H3 Berechnen Sie jeweils den Wert des Integrals.

- a) $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx \quad (k \in \mathbb{Z})$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$
c) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$ d) $\int_0^{a/2} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$
e) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt$ f) $\int_1^e x \ln x dx$

Aufgabe H4 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$

Hinweis: Mittelwertsatz der Integralrechnung und Regel von de l'Hospital

Aufgabe T1 Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} \sin(x^2) dx = \frac{(-1)^k}{\xi_k}$$

gilt, wobei ξ_k eine Zahl zwischen $\sqrt{k\pi}$ und $\sqrt{(k+1)\pi}$ ist.

Aufgabe T2 Beweisen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren.

a) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta \sin(x^2) dx$

b) $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta 2x \sin(x^4) dx$

Aufgabe T3 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^1 (1 + 2x)^3 dx$

b) $\int \operatorname{Arcsin} t dt$

c) $\int_0^\pi (\sin x)^2 dx$

d) $\int \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt$

e) $\int \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt$

f) $\int_1^4 \operatorname{Arctan} \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$

g) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2t}{1 - \sin t} dt$

h) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2 + 4t - t^2}} dt$

Aufgabe T4 Durch geeignete Substitution berechne man

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1} + \sqrt{e^x + 1}} !$$

Hinweis: Man versuche die Wurzeln aus dem Nenner zu entfernen.

Hinweis: Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.

Hinweise zur Vordiplomsklausur im Frühjahr 2007 in HM I

- **Termin:** 15. März 2007 (Donnerstag), 8–10 Uhr.
- Zulässige Hilfsmittel: alle Arten mathematischer Literatur und geheftete Blätter (z. B. Mitschriften, Übungsblätter, alte Klausuren).
- **Nicht zugelassen** sind dagegen einzelne Blätter und elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Laptops, Handys).
- Die **Anmeldung** erfolgt durch Abgabe des Prüfungsscheins beim Sekretariat des Lehrstuhls (Mathematikgebäude, Zimmer 312). Den Prüfungsschein erhalten Sie beim Prüfungsamt der Universität.
- **Anmeldeschluss:** 16. Februar 2007 (Freitag), 11.30 Uhr. Danach sind keine Anmeldungen mehr möglich.
- Die Hörsaalverteilung wird ab 05. März 2007 (Montag) durch Aushang neben Zi 312 sowie im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/hv.html>

bekannt gegeben.