UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
26. Oktober 2006

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1

(a) Seien M_i, $i = 1, 2, 3$ beliebige Mengen. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

(i) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$,

(ii) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$.

(b) Sei X eine beliebige Menge und A, B seien zwei Teilmengen von X mit den charakteristischen Funktionen $\chi_A : X \mapsto \{0, 1\}$. und $\chi_B : X \mapsto \{0, 1\}$. Bestimmen Sie (i) $\chi_{A\cap B}$, (ii)$\chi_{C_X(A)}$, (iii) $\chi_{A\cup B}$, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Aufgabe H2 Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

(a) (i) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \text{ und } 4 < x^2 + y^2 < 25\}$,

(ii) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } 4 < x^2 + y^2 < 25\}$,

(iii) $M_3 = M_1 \cup M_2$, (iv) $M_4 = M_1 \cap M2$, (v) $M_5 = M_1 \Delta M_2$

(b) Gegeben sind die Mengen $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z\}$ und $P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 50 - y^2\}$.

(a) Welche geometrischen Gebilde stellen die Mengen P_1 und E_1 dar.

(b) Charakterisieren Sie die Schnittmenge von E_1 und P_1, indem Sie die Projektionen auf die $x, y-$, $x, z-$ und $y, z-$Ebene betrachten.

Hinweis: Ein Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r wird durch $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ beschrieben.

Aufgabe H3 Gegeben seien die Mengen X, Y, Z, sowie die Funktion $f : X \mapsto Y$, $g : Y \mapsto Z$ und die Komposition $h := g \circ f$. Zeigen Sie, daß

(a) aus der Injektivität von f und g die Injektivität von h folgt,

(b) aus der Bijektivität von f und g die Bijektivität von h folgt.

Aufgabe H4 Gegeben sind die Abbildungen $f_i : D_i \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ durch

$$f_1(x) = \frac{1}{x-2},\ f_2(x) = \frac{x+1}{x-2},\ f_3(x) = x^2 + x + 2$$

(a) Bestimmen Sie die Definitionsbereiche D_i und Bildbereiche $R(f_i) = f(D_i)$.

(b) Untersuchen sie Abbildungen auf Injektivität.

(c) Im Falle der Injektivität bestimme man die Umkehrabbildung.

— bitte wenden —

Aufgabe T1

(a) Sei N eine Menge, I eine Indexmenge und $M_j,\ j \in I$ eine Familie von Teilmengen von N. Zeigen Sie

(i) $C_N\left(\bigcup_{j\in I} M_j\right) = \bigcap_{j\in I} C_N(M_j)$, (ii) $C_N\left(\bigcap_{j\in I} M_j\right) = \bigcup_{j\in I} C_N(M_j)$.

(b) Sei X eine beliebige Menge und $A,\ B$ seien zwei Teilmengen von X. Bestimmen Sie (i) $\chi_{A\setminus B}$, (ii) $\chi_{B\setminus A}$, (iii) $\chi_{A\Delta B}$, (iv) $\chi_{A\cup B}$.

Aufgabe T2 Gegeben sind die Mengen $N_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,4],\ y \geq 0,\ y \leq \sqrt{x}$ und $y \geq \frac{x}{2}\}$ und $N_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,4],\ y \geq 0,\ y^2 \leq 2x,\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$. Skizzieren Sie N_1 und N_2 sowie deren Vereinigung und Durchschnitt.

Aufgabe T3 Gegeben seien die Mengen $X,\ Y,\ Z$ sowie die Funktion $f : X \mapsto Y,\ g : Y \mapsto Z$ und die Komposition $h := g \circ f$. Zeigen Sie,

(a) durch direkten Beweis, daß wenn h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

(b) durch indirekten Beweis, daß wenn h injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe T4

(a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität

(i)
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$$

(ii)
$$f: \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x+4}{x-3}$$

(iii) Seien $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$
$$f: [0,1] \to [u,v] \subset \mathbb{R}, \quad x \mapsto xu + (1-x)v$$

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
(i) $f(x) = 7x + 6$, (ii) $f(x) = x^2 + 4x - 2$.

Hinweis Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.

Wichtige Termine im Wintersemester 2006/2007

- Übungsklausuren
  - 1.Übungsklausur zu HM I Samstag, 09.12.2006 08.00-10.00 Uhr
  - 2.Übungsklausur zu HM I Samstag, 03.02.2007 08.00-10.00 Uhr

  Für die erste Übungsklausur ist einmalig eine unverbindliche Anmeldung erforderlich.

- Vordiplomsklausuren
  - Klausur zu HM I : Donnerstag, 15.03.2007 08.00-10.00 Uhr
  - Klausur zu HM II : Donnerstag, 15.03.2007 11.00-13.00 Uhr
  - Klausur zu HM III: Freitag, 16.03.2007 08.00-10.00 Uhr

  Anmeldung zu den Vordiplomsklausuren ist **ab Anfang Dezember im Sekretariat Zi. 312** möglich. Bitte beachten Sie, daß der **Anmeldschluß** für die Vordiplomsklausuren der **Freitag, 16.Februar 2007** ist, danach werden keine weiteren Anmeldungen mehr angenommen.