UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
2. November 2006

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1 Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Dann ist auch $A + B := \{\, x \mid x = a + b \text{ für ein } a \in A \text{ und ein } b \in B \,\}$ eine beschränkte Menge und es gilt

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \qquad \text{sowie} \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Aufgabe H2 Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

(a) $A = \left\{ x + \dfrac{1}{x} \;\middle|\; 0 < x \leq 42 \right\}$

(b) $B = \left\{ \dfrac{x^2}{1 + x^2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe H3 Man beweise mit vollständiger Induktion,

(a) daß die Summe drei aufeinanderfolgenden Kubikzahlen durch 9 teilbar ist,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2},$

(d) $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ für $x \neq 2k\pi$.

Hinweis: $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$.

Aufgabe H4 Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion h gegeben durch

$$h(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

(a) Untersuchen Sie Funktion auf Monotonie, Beschränktheit und Bijektivität.

(b) Überlegen Sie sich, wie das Intervall $(-1, 1)$ bijektiv auf $(0, 1)$ abgebildet werden kann. Geben Sie dann eine Abbildung an, die $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(0, 1)$ abbildet.

— bitte wenden —

Aufgabe T1 Es sei A eine nichtleere Menge positiver reeller Zahlen. Betrachten Sie die Menge $B := \{ x \mid x = a^{-1} \text{ für ein } a \in A \}$ und zeigen Sie: Ist $\inf A > 0$, so ist B nach oben beschränkt und es gilt $\sup B = (\inf A)^{-1}$.

Aufgabe T2 Für die Elemente (a_1, a_2) und (b_1, b_2) der Zahlenebene R^2 sei eine Verknüpfung $*$ wie folgt definiert:

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Zeigen Sie, daß durch $(\mathbb{R}^2, *)$ eine abelsche Gruppe gegeben ist.

Aufgabe T3 Man beweise mit vollständiger Induktion,

(a) die Ungleichung zwischen geometrischen und arithmetrischen Mittel, d.h es gilt für positive reelle Zahlen $a_i,\ i = 1, \ldots, n$ die Ungleichung:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

(b) daß für $a \in (0, 1)$ und $n \geq 1$ die Ungleichung $(1 - a)^n < \dfrac{1}{1 + na}$ gilt,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Aufgabe T4 Man bestimme alle Punkte der x, y-Ebene für die gilt:

$$|x + 1| + |y + 2| \leq 2.$$

Hinweis Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.