UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
8. Dezember 2006

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1

(a) Es sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Zeigen Sie , daß dann $n_k \geq k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) (a_j) sei eine Zahlenfolge, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie unter (a). Die Folge (b_k) mit $b_k := a_{n_k}$ heißt **Teilfolge** der Folge (a_j). Zeigen Sie: Ist die Folge (a_j) konvergent mit Grenzwert a, so ist jede Teilfolge konvergent mit demselben Grenzwert a.

(c) Zeigen Sie, daß H genau dann Häufungspunkt der Folge (a_j) ist, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ gibt die gegen H konvergiert.

(d) Zeigen Sie ,daß jede beschränkte reelle Folge eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe H2 Die Folgen (σ_n) und (t_n) sind gegeben durch

$$\sigma_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{und} \qquad t_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

(a) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e - \dfrac{1}{n \cdot n!} < \sigma_n < e - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

(b) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e - \dfrac{3}{n} < t_n < e - \dfrac{1}{2n}$.

Aufgabe H3 Beweisen Sie, daß zu jeder reellen Zahl Zahl x eine Folge x_n existiert mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to x$.

Aufgabe H4

(a) Untersuchen Sie die komplexe Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ auf Konvergenz.

(b) Zeigen Sie, daß die Reihe $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)3^k}$ konvergiert. Weiter sei s_n die n-te Partialsumme . Geben Sie ein $N \in \mathbb{N}$ an, so daß $|s_N - s| < \dfrac{1}{2} 10^{-6}$ gilt.

Aufgabe T1

(a) Gegeben sei folgende rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Zeigen Sie, also dass zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq n_0$$

gilt. Berechnen Sie schließlich den Grenzwert der Folge.

— bitte wenden —

(b) Die Folgen (a_n) und (b_n) seien durch

$$0 < a_1 < b_1, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Untersuchen Sie beide Folgen auf Monotonie und Beschränktheit.

(iii) Zeigen Sie, dass die Folgen (a_n) und (b_n) denselben Grenzwert besitzen und berechnen Sie diesen (Hinweis: Betrachten Sie $a_{n+1}b_{n+1}$).

(c) Es sei $q \in (0,1)$. Für die Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ gelte

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q \cdot |x_n - x_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Die Folge (x_n) konvergiert, und für ihren Grenzwert x gilt

$$|x - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Aufgabe T2 Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei monoton fallend und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere. Zeigen Sie, dass dann

$$n \cdot a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

gilt. Folgt dies auch, wenn wir statt der Monotonie nur $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen?

Aufgabe T3 Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{und} \qquad b_n := \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}.$$

a) Beweisen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist. Warum ist das Kriterium von Leibniz hier nicht anwendbar?

c) Was können wir mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sagen? Und was liefert das Wurzelkriterium?

Aufgabe T4 Für welche $z \in \mathbb{C}$ liegt Konvergenz vor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$.

Hinweis: Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.