UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
15. Dezember 2006

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe H1

(a) Man gebe $S = 0.181818\ldots$ in der Form $S = \dfrac{p}{q}$ an, wobei p und q ganze Zahlen sind.

(b) Man berechne die Reihensumme von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$!

(c) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, (iii) $\displaystyle\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{\left(\pi + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{2n}}$, (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n!}$,

Aufgabe H2

(a) Zeigen Sie, daß für $x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x > \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ gilt.

(b) Wir definieren die Funktionen **Sinus hyperbolicus** $\sinh(x) := \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \end{cases}$.

Untersuchen Sie die Funktion auf Monotonie und bestimmen Sie die Umkehrfunktion . Welchen Namen hat die Umkehrfunktion ?

Aufgabe H3 Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-4}{x^3-2x^2+7x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+5x+4}{x^3+x^2+x+1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+7x+2}{x^3-x^2+3x}$

Aufgabe H4 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b, & x \le 1, \\ c - x, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist und zudem $f(0) = f(2) = 0$ gilt.

Aufgabe T1

(a) Man bestimme den Wert von $\displaystyle\ln(2) + \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

(b) Man zeige, daß $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$ konvergiert und berechne die Reihensumme mit einem Fehler, dessen Betrag kleiner als $0.5 \cdot 10^{-3}$ ist !

— bitte wenden —

(c) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}, \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n}{e^n}, \quad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}, \quad \text{(iv)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sin(n)}.$$

Aufgabe T2

(a) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Bereiche wo $e^x \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ gilt.

(b) Wir definieren die Funktion **Cosinus hyperbolicus** $\cosh(x) := \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \end{cases}$.

Zeigen Sie, daß die Funktion zwei Monotoniezweige hat und bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktion. Mit welchen Namen wird die Umkehrfunktion bezeichnet ?

Aufgabe T3 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{9}\left(\left(1 + \dfrac{9}{x}\right)^9 - 1\right)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x} - 2x\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x}$

Aufgabe T4 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wo ist diese Funktion stetig?

Hinweis: Die Aufgaben H1-H4 werden in der Hörsaalübung und die Aufgaben T1-T4 in den Tutorien besprochen.

Frohe Weihnachten und

ein gesundes, glückliches neues Jahr

2007