Vorlesungszusammenfassung HMI WS 2006/07

Kapitel 1 Logische Grundlagen

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (W) oder falsch (F) ist.

Aussagen werden durch A, B, C, ... bezeichnet.

1) Verknüpfung von Aussagen mittels der logischen Symbole $\neg, \vee, \wedge, =, \rightarrow, \leftrightarrow$ zu neuen Aussagen.

Negation von A: $\neg A$ W bedeutet, dass A F ist und
$\neg A$ F bedeutet, dass A W ist.

$A \wedge B$ (A und B), $A \vee B$ (A oder B) definieren wir durch eine Wahrheitswertetafel

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
W	W	W	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	F	F

$A \wedge B$ ist nur dann W, wenn A und B gleichzeitig W sind.
$A \vee B$ ist nur dann F, wenn A und B gleichzeitig F sind.

Bemerkungen: $A \wedge (\neg A)$ ist stets F, $A \vee (\neg A)$ ist stets W.

$A = B$ bedeutet: A und B sind verschiedene Darstellungen derselben Aussage. (Beispiele: $\neg(\neg A) = A$, $A \vee B = B \vee A$,

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$)

$A := B$ A wird durch B definiert.

$(\neg\neg A := \neg(\neg A))$

Implikation $A \rightarrow B$ (aus A folgt B / wenn A dann B)

$(A \rightarrow B) := (\neg A) \vee B$ bzw.

A	B	$A \rightarrow B$	
W	W	W	1
W	F	F	
F	W	W	
F	F	W	2

(*)

$A \rightarrow B$ ist nur dann F, wenn A W und B F sind.

Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ (A dann und nur dann wenn B / A genau dann wenn B / A ist zu B äquivalent)

$(A \leftrightarrow B) := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Direkter und indirekter Beweis und Widerspruchsbeweis

Satz: Voraussetzung A. Es soll nachgewiesen werden, dass mit A die Richtigkeit von B gefolgert werden kann.

Direkter Beweis: Zeile ① in (*).

A ist w als Voraussetzung. Folgere B auf richtige Weise. Dann ist B w.

Indirekter Beweis: (mit $(A \to B) = (\neg B \to \neg A)$)

gehen wir von $\neg B$ aus. Folgern $\neg A$. Nach Zeile ② in (*) ist dann, da $\neg A$ zwingend F ist, $\neg B$ F also B w.

Widerspruchsbeweis: $A \wedge (\neg B) \to C \wedge (\neg C)$

Folgere aus $A \wedge (\neg B)$ (Widerspruchsannahme) die stets falsche Aussage (den Widerspruch) $C \wedge (\neg C)$. Wieder mit ① in (*) ist dann, da A als Voraussetzung w, B w.

Beispiele hierzu:

Satz 1 Es sei p eine natürliche Zahl. Dann gelten:

a) p ist gerade $\longleftrightarrow$ p^2 ist gerade.

b) p ist ungerade $\longleftrightarrow$ p^2 ist ungerade.

Satz 2 Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational.

2) Eine Aussageform ist ein Satz, der eine oder mehrere Variable enthält und der nach dem Ersetzen der Variablen durch konkrete Werte in eine Aussage übergeht. (Wir schreiben $A(x)$, $A(x,y)$... x, y bezeichnen die Variablen).

$\forall x: A(x)$ bedeutet: für alle Variablen x trifft $A(x)$ zu

$\exists x: A(x)$ bedeutet: es gibt eine Variable x, für die $A(x)$ zutrifft.

$$\neg(\forall x: A(x)) := (\exists x: \neg A(x))$$

$$\neg(\exists x: A(x)) := (\forall x: \neg A(x))$$

Beispiel $\neg(\exists x \text{ reell}: x^2+x+1=0) = (\forall x \text{ reell}: x^2+x+1 \neq 0)$.

Kapitel 2 Grundlagen der Mengenlehre

Eine <u>Menge</u> ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem neuen Ganzen.

Die in der Menge M zusammengefassten Objekte heißen die <u>Elemente</u> von M.

$\underline{x \in M}$ bedeutet: das Element x gehört zu M.

$\underline{(x \notin M)} := \neg(x \in M)$: x gehört nicht zu M.

Für jede Menge M und jedes x gilt entweder $x \in M$ oder $x \notin M$.

Schreibweise: $M = \{x \mid x$ hat eine charakt. Eigenschaft$\}$

oder durch Auflistung: $M = \{$rot, blau, gelb$\}$.

$\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen,
$\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, $\mathbb{R}$ die der reellen und $\mathbb{C}$ die der komplexen Zahlen.

Im folgenden sind $M_1, M_2, \ldots$ beliebige Mengen.

1) <u>Inklusion</u> $\underline{M_1 \subset M_2}$ „M_1 ist Teilmenge von M_2"

$$\underline{\text{Def: } (M_1 \subset M_2) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in M_1 : x \in M_2.}$$

2) <u>Gleichheit</u>: $(M_1 = M_2) \Longleftrightarrow (M_1 \subset M_2) \wedge (M_2 \subset M_1)$

<u>Bemerkungen</u>: 1) „$\subset$" schließt Gleichheit nicht aus:
Es gilt $M \subset M$ für jede Menge M.

2) Aus $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$ folgt: $M_1 \subset M_3$.

3) <u>Durchschnitt</u> $\underline{M_1 \cap M_2}$ (M_1 geschnitten mit M_2) ist neue Menge:

$$\underline{(x \in M_1 \cap M_2) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} (x \in M_1) \wedge (x \in M_2)}$$

Es gelten: a) $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$

b) $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$

c) $M_1 \cap M_2 \subset M_1$, $M_2 \cap M_1 \subset M_2$

$$\bigcap_{j=1}^{n} M_j := M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n = \{x \mid x \in M_j \text{ für } j = 1, 2, \dots, n\}.$$

4) Vereinigung $M_1 \cup M_2$

Def: $M_1 \cup M_2 = \{x \mid (x \in M_1) \vee (x \in M_2)\}$

Es gelten: a) $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$

b) $(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$

c) $M_1 \subset M_1 \cup M_2$, $M_2 \subset M_1 \cup M_2$

d) $M_1 \cap M_2 \subset M_1 \cup M_2$

$$\bigcup_{j=1}^{n} M_j := M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n = \{x \mid x \in M_j \text{ für mindestens ein } j \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Satz 1 (Distributivgesetze)

a) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$,

b) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$.

5) Differenz, Komplement

$M_1 \setminus M_2 := \{x \mid (x \in M_1) \wedge (x \notin M_2)\}$

Falls $M_2 \subset M_1$, dann $C_{M_1} M_2 := M_1 \setminus M_2$ (Komplement von M_2 in M_1)

Es gilt: $M_1 \setminus (M_1 \setminus M_2) = M_1 \cap M_2$

und im Fall $M_2 \subset M_1$ kann das auch so geschrieben werden: $C_{M_1}(C_{M_1} M_2) = M_2$.

(Zur Begründung wird ein Teil der folgenden Aussage benötigt:

Ü: $(M_2 \subset M_1) \longleftrightarrow (M_2 = M_1 \cap M_2) \longleftrightarrow (M_1 = M_1 \cup M_2)$)