Beispiele: 1) (Folgerung aus Satz 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

2) Der Konvergenzradius von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ ist ∞.

3) Die für $|z| < r$ (Konvergenzradius) definierte Funktion $p(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist für jedes z mit $|z| < r$ stetig.

4) Ist $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ gegeben mit $a_0 (= f(0)) \neq 0$ und $r > 0$, so gilt (Folgerung aus Satz 5) für die b_k aus $\frac{1}{f(z)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$:

$b_0 = \frac{1}{a_0}$ und $b_k = -\frac{1}{a_0} \sum\limits_{\ell=0}^{k-1} a_{k-\ell} b_\ell \quad (k = 1, 2, \dots)$.

5) $\exp(z)$ um i entwickeln: $\exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(i)}{k!} (z-i)^k$,

$\frac{1}{1-z}$ um $\frac{1}{2}$ entwickeln: $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} (z - \frac{1}{2})^k$

mit $r = \frac{1}{2}$, d.h. konvergent für $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$,

(Ü) $\frac{1}{1-z}$ um $\frac{i}{2}$ entwickeln: $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}}\right)^k$

mit $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (Wie kann man sich r geometrisch veranschaulichen?)

Kapitel 14 Die elementaren Funktionen: Exponential-, Hyperbel-trigonometrische Funktionen und Umkehrfunktionen

---

14.1 Mit der Funktionalgleichung der exp-Funktion (11. Kapitel) begründet man $\exp(r) = e^r$ für $r \in \mathbb{Q}$. Mit der Stetigkeit der exp-Funktion und damit, dass jedes $x \in \mathbb{R}$ durch rationale Zahlen approximiert werden kann, rechtfertigt man jetzt die Schreibweise $e^x = \exp(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ und $e^z = e^x e^{iy}$

(mit $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$).

14.2 Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gelten

$$\underline{\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0} \quad \text{und} \quad \underbrace{\lim_{x\to\infty} x^{-k} e^{x} = \infty}_{(*)}$$

Zur Erinnerung (z.B. $(*)$ bedeutet):

Zu jedem $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ und $M > 0$ existiert $R > 0$ mit:

$\underline{\frac{e^x}{x^k} > M}$ für $x > R$. (jede noch so große Zahl M wird für genügend großes x durch $\frac{e^x}{x^k}$ übertroffen)

Für $k = 0$ hat man also: $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

14.3 $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $y = \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$

ist stetig und wegen der strengen Monotonie und wegen <u>14.2</u> bijektiv. Die Umkehrfunktion ist ln:

$\underline{y = \ln(x), \; x > 0}$: $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

ln ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv.

Es gelten: $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

$\ln(e^x) = x \; (x \in \mathbb{R})$, $e^{\ln(x)} = x \; (x > 0)$

$\to$ $\ln(e) = 1$, $\ln 1 = 0$

$\ln(x) < 0$ für $0 < x < 1$, $\ln(x) > 0$ für $x > 1$.

<u>Satz 1</u> (Umschreiben von Eigenschaften der exp-Fkt auf ln)

a) $\underline{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \; (x>0, y>0)}$
$\underline{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad (x>0)}$ $\Big\} \to$ $\underline{\ln(x^n) = n \ln(x)}$, $\underline{x>0, \; n \in \mathbb{Z}}$

b) $\underline{\text{Für } k \in \mathbb{N} \text{ gelten: } \lim_{x\to\infty} x^{-k} \ln(x) = \lim_{x\to 0+} x^k \ln(x) = 0.}$

14.4

Für $a>0$ wird definiert $\underline{f(x)=a^x:=e^{x\ln(a)}}$, $x\in\mathbb{R}$.

$f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, f ist streng $\uparrow$, falls $a>1$ und f ist streng $\downarrow$ für $0<a<1$.

Die Umkehrfunktion für $a>0, a\neq 1$ wird durch $\underline{\log_a}$ bezeichnet: $\underline{\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R}}$. Man hat $\log_a(a^x)=x, x\in\mathbb{R}$ und $a^{\log_a(x)}=x, x>0$.

Mit $a>0, b>0$ $(a\neq 1, b\neq 1)$, $x>0$ gilt

$$\underline{\log_a(x)=\log_a(b)\log_b(x).}$$

Es ist $\log_e(x)=\ln(x)$ $(x>0)$.

Beachte auch $(x^x)^x \neq x^{(x^x)}$ $(x>0)$

14.5 Die Hyperbelfunktionen

1) $\cosh(z)=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}z^{2k} = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$, $z\in\mathbb{C}$

$\sinh(z)=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}z^{2k+1} = z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$, $z\in\mathbb{C}$

(Der Konvergenzradius ist jeweils ∞)

Satz 2
a) $\underline{\cosh(z)=\cosh(-z)}$. $(z\in\mathbb{C})$, $\cosh(0)=1$

$\underline{\sinh(z)=-\sinh(-z)}$ $(z\in\mathbb{C})$, $\sinh(0)=0$

b) $\underline{\cosh(z+w)=\cosh(z)\cosh(w)+\sinh(z)\sinh(w)}$

$\underline{\sinh(z+w)=\sinh(z)\cosh(w)+\cosh(z)\sinh(w)}$, $z,w\in\mathbb{C}$

$\underline{\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1}$ $(z\in\mathbb{C})$

---

2) $\sinh(x)=0 \iff x=0$ $(x\in\mathbb{R})$

$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, x\in\mathbb{R}$; $\coth(x)=\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$, $x\neq 0$

<u>Satz 3</u> a) $\underline{\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ bijektiv, stetig, $\uparrow$ streng

b) $\cosh: [0,\infty) \to [1,\infty)$ bijektiv, stetig, $\uparrow$ streng

c) $\cosh: (-\infty,0] \to [1,\infty)$ bijektiv, stetig, $\downarrow$ streng

d) $\tanh: \mathbb{R} \to (-1,+1)$ bijektiv, stetig, $\uparrow$ streng

Die zugehörigen Umkehrfunktionen heißen Areafunktionen:

(a)) $\operatorname{ar}\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{ar}\sinh(\sinh(x)) = x$ $\quad x \in \mathbb{R}$
$\sinh(\operatorname{ar}\sinh(x)) = x$

Eine explizite Darstellung erhält man durch Auflösen von $x = \sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ für $x \in \mathbb{R}$ nach y:

$$y = \operatorname{ar}\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \; x \in \mathbb{R}$$

(b)) $\operatorname{ar}\cosh_+: [1,\infty) \to [0,\infty)$, $\operatorname{ar}\cosh_+(\cosh(x)) = x \quad (x \geq 0)$
$\cosh(\operatorname{ar}\cosh_+(x)) = x \quad (x \geq 1)$

(c)) $\operatorname{ar}\cosh_-: [1,\infty) \to (-\infty,0]$, $\operatorname{ar}\cosh_-(\cosh(x)) = x \quad (x \leq 0)$
$\cosh(\operatorname{ar}\cosh_-(x)) = x \quad (x \geq 1)$

Auflösen von $x = \cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ für $x \geq 1$ nach y ergibt

$$y = \operatorname{ar}\cosh_\pm(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}).$$

<u>14.6</u> <u>Zu den trigonometrischen Funktionen</u>

1) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}| = 1$ oder $(\operatorname{Re}(e^{ix}))^2 + (\operatorname{Im}(e^{ix}))^2 = 1$

2) $\underline{e^{iz} = \cos z + i \sin z}$, $z \in \mathbb{C}$

mit $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots$ $\quad (z \in \mathbb{C})$

$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots$

Man liest ab: $\cos(z) = \cos(-z)$, $\sin(z) = -\sin(-z)$ $(z\in\mathbb{C})$

$$\cos(0) = 1 \quad , \quad \sin(0) = 0$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \quad , \quad \lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0$$

$$\cos(iz) = \cosh(z) \ , \quad \sin(iz) = i\sinh(z) \qquad (z\in\mathbb{C})$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

$$\underline{\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})} \ , \ \underline{\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})}$$

Aus der Funktionalgleichung für die exp-Funktion leitet man Additionstheoreme ab, etwa:

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \qquad (z,w\in\mathbb{C})$$

Hiermit folgt leicht: $\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$ $\underline{(*)}$

3) Für $x\in\mathbb{R}$: $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$$\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

Hiermit und mit $|e^{ix}| = 1$ findet man $\cos x$ und $\sin x$ am Einheitskreis der komplexen Ebene (wie aus der Schule gewohnt).

4) <u>Satz 4</u>: <u>$y = \cos x$ hat im Intervall $(0,2)$ genau eine Nullstelle x_0.</u> (Auf $(0,2)$ ist cos streng monoton fallend, $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 \le -\frac{1}{3}$. Es gilt auf $(0,2)$ $\sin(x) \ge \frac{x}{3}$)

Zur Begründung wird mehrfach das Leibniz Kriterium für alternierende Reihen verwendet (Satz 8/Kapitel 9) und $(*)$ von oben (2)).

Mit der in Satz 4 festgelegten Zahl x_0 wird definiert

$\underline{\pi := 2x_0.}$

Satz 5 <u>Für $k \in \mathbb{Z}$ hat man: $e^{i\pi k} = (-1)^k$, $e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2}} = i(-1)^k$,</u>

<u>$\cos(\pi k) = (-1)^k = \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$,</u>

<u>$\sin(\pi k) = 0 = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$.</u>

<u>Bemerkungen / Folgerungen</u>

1) $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $2\pi i$-periodisch: $e^{z+2\pi i} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$

$\to$ 2) $\sin$, $\cos$ sind 2π-periodisch

3) ($\sin$, $\cos$ gehen durch "Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$" ineinander über) $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos(z)$

5) Die <u>Arcus-Funktionen</u> (<u>Umkehrfunktionen von sin, cos</u>)

Es sei $k \in \mathbb{Z}$ (beliebig, fest)

$\sin: \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, +1]$ streng monoton (bijektiv)

$\sin^{-1} =: \arcsin_k : [-1, +1] \to \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

d.h. $y = \arcsin_k(x)$, $x \in [-1, +1] \Longleftrightarrow x = \sin y$ und $y \in \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gibt es also eine Umkehrfunktion $\arcsin_k$ von $\sin$. Diese Funktionen heißen auch Zweige von $\arcsin$. Die Umkehrfunktion $\arcsin_0$ heißt <u>Hauptzweig</u> und wird durch $\mathrm{Arc\,sin}$ bezeichnet.

<u>analog für cos:</u> $\cos: [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1, 1]$ ist streng monoton (bijektiv)

$\arccos_k : [-1, 1] \to [k\pi, (k+1)\pi]$ ist erklärt durch

<u>$y = \arccos_k(x)$, $x \in [-1, +1] \Longleftrightarrow x = \cos y$ und $y \in [k\pi, (k+1)\pi]$</u>

$y = \arccos_0(x)$, $x \in [-1, +1]$, $y \in [0, \pi]$ heißt <u>Hauptzweig</u>, und es wird auch $\mathrm{Arc\,cos}(x)$ für $\arccos_0(x)$ geschrieben.