6) Ergänzungen

1. $\sin(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Satz 6 $\quad$ 2π ist die kleinste Periode von sin und cos.

(vgl. Bemerkung 2), Satz 5)

Satz 7 $\quad$ $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$

Beispiele: 1) $\cosh(z) = 0 \Longleftrightarrow z = i\frac{\pi}{2}(2k-1) \quad (k \in \mathbb{Z})$

2) Man rechnet mit Satz 7 nach, dass sin und cos auch im Komplexen genau die oben angegebenen reellen Nullstellen haben.

3) (vgl. Abschnitt 7.4 / Satz 4 aus Kapitel 7)

Sind $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gegeben, so hat man in

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\varphi_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

mit $\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi$ und $\varphi = \arg(a)$ alle Lösungen der Gleichung $z^n = a$.

2. Die Landau-Symbole („o", „O")

Es sei g eine Funktion, die für $0 < |x - x_0| < r$ definiert und dort von Null verschieden ist.

$$\left(f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0 \right) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right)$$

Beispiele: $f(x) = o(1),\ x \to x_0$ bedeutet $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = o(x) \quad \text{für } x \to 0.$$

$$\left(f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0 \right) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ ist beschränkt für } x \to x_0.$$

Beispiel: $\sin\frac{1}{x} = O(1)$ für $x \to 0$.

Kapitel 15 Differentialrechnung in einer reellen Variablen

15.1 1) $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktion $f: I \to \mathbb{C}$ heißt <u>differenzierbar in x_0</u>, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Dieser Grenzwert heißt <u>die (erste) Ableitung von f in x_0</u>; er wird durch <u>$f'(x_0)$</u> oder <u>$(Df)(x_0)$</u> bezeichnet.

f heißt <u>auf I differenzierbar</u>, wenn $f'(x)$ für jedes $x \in I$ existiert. Dann ist die Zuordnung $\begin{matrix} x \to f'(x) \\ I \to \mathbb{C} \end{matrix}$ eine Funktion, <u>die erste Ableitung f' von f auf I</u>.

Mit $f^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ wird die n-te Ableitung von f auf I bezeichnet, wobei $f^{(0)} := f$ und $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ definiert sind.

Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, so geht die Gerade

$$y(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) \quad \text{für } h \to 0$$

über in die Gerade <u>$T_{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$</u>. Diese Gerade heißt <u>Tangente an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$</u>.

Die Steigung $f'(x_0)$ dieser Geraden wird als Steigung des Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ definiert.

<u>Beispiele:</u> 1) <u>$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$</u>

$f'(x) = n x^{n-1}$, <u>$f^{(l)}(x) = \binom{n}{l} l! \, x^{n-l}$ $(l \in \mathbb{N})$</u>

$f^{(n)}(x) = n!$, $f^{(l)}(x) = 0$ für $l > n$.

2) <u>$f(x) = e^{cx}$</u> (c konst $\in \mathbb{C}$), <u>$f'(x) = c e^{cx}$</u>

Satz 1: Ist f in $x_0 \in I$ diff'bar, so gibt es eine in x_0 stetige Funktion $r: I \to \mathbb{C}$ mit $r(x_0) = 0$ und

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x)(x-x_0).$$

Gibt es umgekehrt eine in x_0 stetige Funktion $r: I \to \mathbb{C}$ mit $r(x_0) = 0$ und eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ derart, dass

$$f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + r(x)(x-x_0) \quad \text{gilt,}$$

so ist f in x_0 diff'bar mit $a = f'(x_0)$.

Beispiele: 1) $e^{cx} = e^{cx_0} + ce^{cx_0}(x-x_0) + \underbrace{e^{cx_0}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c^k (x-x_0)^{k-1}\right)}_{= r(x)}(x-x_0)$

2) $x > 0$, $x_0 > 0$:

$$f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{x_0} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}_{= f'(x_0)}(x-x_0) + (x-x_0)\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} - \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\right)}_{= r(x)}$$

3) (Folgerung aus Satz 1) Ist f in x_0 diff'bar, so ist f in x_0 stetig.

Die Umkehrung ist falsch: $f(x) = |x|$ ist in 0 stetig aber nicht diff'bar.

15.2 Satz 2: $f, g: I \to \mathbb{C}$ seien in $x_0 \in I$ diff'bar. Dann sind $f+g$, fg, und falls $g(x_0) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ in x_0 diff'bar. Es gelten:

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beispiele: 1) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(n)}(x) = ?$

2) $f(x) = \tan x$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

3) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $f'(x) = nx^{n-1}$

..., α_k konst $\in \mathbb{C}$).

$p^{(j)}(0) = a_j\, j!$ $\quad (j = 0, 1, \dots, n)$

Satz 3 (Kettenregel)

$I, J \subset \mathbb{R}$ seien Intervalle und $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{C}$ Funk... mit: f ist in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ diff'bar. Dann ist $g \circ f$ in x_0 diff'bar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Beispiele: 1) $h(x) = e^{f(x)}$, $h'(x) = f'(x)\, e^{f(x)}$

2) $h(x) = \sin \frac{1}{x}$, $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$

3) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $h'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \\ 0, & x = \end{cases}$

...merkung Es sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $f \in C^n(I) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} f \in C^j(I)$ für $j = 0, 1, \dots, n$

h aus 3) liegt in $C^0(I)$, ist überall diff'bar, gehört aber nicht zu $C^1(I)$

$f \in C^\infty(I) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} f \in \bigcap_{j=0}^{\infty} C^j(I)$ ($f \in C^j(I)$ für jedes $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

...tz 4 I sei ein Intervall. $y = g(x)$ sei die Umkehrfunktion der stetigen bijektiven Funktion $x = f(y)$, $f: I \to J = f(I)$. Ist f in $y_0 \in I$ diff'bar und gilt $f'(y_0) \neq 0$, so ist g in $x_0 := f(y_0)$ diff'bar mit

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \quad \text{bzw} \quad g'(f(y_0)) = \frac{1}{f'(y_0)}$$

...: 1) $g(x) = \ln x$ $(x > 0)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

2) $h(x) = \ln |f(x)|$, $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (f...

...) $g(x) = \operatorname{Arc\,tan}(x)$

15.3 Extremwerte. Mittelwertsätze der DR (MWSDR)

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

In x_0 besitzt f <u>ein globales Maximum</u>, falls $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I$ gilt. Gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt, so heißt $f(x_0)$ <u>lokales Maximum</u> für f.

f besitzt in x_0 ein <u>globales (lokales) Minimum</u>, falls $-f$ in x_0 ein globales (lokales) Maximum hat.

Ein Maximum oder Minimum ist ein Extremum.

<u>Satz 5</u>.

<u>$f: (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum, und f sei in x_0 diff'bar. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.</u>

Extremwerte für f können liegen in inneren Punkten des Definitionsintervalls, in denen f' existiert und Null ist, in Randpunkten des Def.intervalls und in Punkten, in denen f nicht diff'bar ist.

<u>Satz 6</u> (<u>Satz von Rolle</u>)

<u>Es sei $f \in C^0([a, b])$ und auf (a, b) diff'bar. Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ (ein $\vartheta \in (0, 1)$) mit</u>

$$\underline{f'(\xi) = 0 \quad (f'(a + \vartheta(b - a)) = 0).}$$

<u>Satz 7</u> (<u>MWSDR</u>)

<u>f, g seien auf $[a, b]$ stetig und in (a, b) diff'bar. Dann gibt es eine Zahl $\vartheta \in (0, 1)$ (ein $\xi \in (a, b)$), so dass</u>

$$(f(b) - f(a))\, g'(\underbrace{a + \vartheta(b - a)}_{= \xi}) = (g(b) - g(a))\, f'(\underbrace{a + \vartheta(b - a)}_{= \xi}) \text{ gilt}$$

(Auf der Kurve $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$, $a \leq t \leq b$, gibt es einen Punkt $\vec{\gamma}(\xi)$, in dem die Kurve dieselbe Steigung hat wie die Gerade, die $\vec{\gamma}(a)$ mit $\vec{\gamma}(b)$ verbindet)

Setzt man in Satz 7 $g(x) = x$, so erhält man

<u>Satz 8 (MWSDR)</u>

<u>Ist f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) diff'bar, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$.</u>

(Etwas andere Schreibweisen: $x, x_0 \in [a,b]$ bzw $x, x+h \in [a,b]$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \qquad (\xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0)$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(\xi)\, h \qquad (\xi \text{ zwischen } x \text{ und } x+h)$$

<u>Beispiel</u>: $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 66$, $x_0 = 64$

$$\sqrt{66} = 8 + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \quad , \; 64 < \xi < 66$$

Man erhält einfach $8 + \frac{8}{65} < \sqrt{66} < 8 + \frac{8}{64}$)

<u>Satz 9</u> Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ auf I definiert und diff'bar.

Es gelten:

a) $f'(x) > 0,\ x \in I \overset{!}{\longrightarrow} f \uparrow$ (streng)

b) $f'(x) < 0,\ x \in I \overset{!}{\longrightarrow} f \downarrow$ (streng)

c) $f'(x) \geq 0,\ x \in I \Longleftrightarrow f \uparrow$

d) $f'(x) \leq 0,\ x \in I \Longleftrightarrow f \downarrow$

e) $f'(x) = 0,\ x \in I \Longleftrightarrow f(x) = \text{Const},\ x \in I$.