Beispiele:

1) f, g seien auf $[a,b]$ diff'bare Fkt. Aus $f'(x) \leq g'(x)$ $(a \leq x \leq b)$ folgt $f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)$, $a \leq x \leq b$.

2) Es sei $c \in \mathbb{C}$ gegeben.
Jede diff'bare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f'(x) = c f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, hat die Form $f(x) = \alpha e^{cx}$ mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{C}$.
Verwendet man dies mit $c = i$ und zerlegt f in Re- und Im-Teil, so sieht man, dass man $u(x) = \cos x$ und $v(x) = \sin x$ als Lösungen der folgenden Differential-gleichungsprobleme charakterisieren kann:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'(x) = -v(x), & u(0) = 1 \\ v'(x) = u(x), & v(0) = 0 \end{array} \right\} \text{ oder } \left\{ \begin{array}{l} u''(x) + u(x) = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0 \\ v''(x) + v(x) = 0,\ v(0) = 0,\ v'(0) = 1 \end{array} \right.$$

15.4 Taylorpolynome, Taylorformel

Es sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^n(I)$.

$T_n(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$ heißt das <u>n-te Taylorpolynom von f um x_0</u>.

Bemerkungen: $T_0(f, x_0)(x_0) = f(x_0)$, $T(f, x_0)^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$T_n(f, x_0)(x) = T_{n-1}(f, x_0)(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Satz 10 (Taylorsatz)

Es sei $f \in C^n(I)$ und $f^{(n+1)}$ existiere auf I. Zu beliebigen Punkten $x, x_0 \in I$ gibt es ein $\vartheta \in (0,1)$, so dass gilt:

$$(T) \quad f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}}_{=: R_n(x - x_0)}$$

Bemerkungen

— $x_0 + \vartheta(x-x_0) =: \xi$ ist ein Punkt zwischen x und x_0.

— Oft setzt man $x - x_0 = h$ und $x = x_0 + h$

— (T): $f(x) = T_n(f, x_0)(x) + o((x-x_0)^n)$ $\quad (x \to x_0)$

$(\tilde{T})$ $\quad f(x) = T_{n-1}(f, x_0)(x) + (x-x_0)^n \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(1)\right]$ $\quad (x \to x_0)$

Aus $(\tilde{T})$ folgert man:

Satz 11 Es sei $f \in C^n([a,b])$, $x_0 \in (a,b)$. Es seien erfüllt:

$f^{(j)}(x_0) = 0 \; (j = 1, 2, \ldots, n-1)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Dann hat man:

Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 keinen lokalen Extremwert

Ist n gerade, so liegt

$$\begin{cases} \text{im Fall } f^{(n)}(x_0) > 0 \text{ bei } x_0 \text{ ein lokales Minimum} \\ \text{im Fall } f^{(n)}(x_0) < 0 \text{ bei } x_0 \text{ ein lokales Maximum} \end{cases}.$$

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2mal stetig diff'bar. Wechselt $f''(x)$ beim Durchgang von x durch x_0 das Vorzeichen, so heißt $(x_0, f(x_0))$ ein Wendepunkt für f ("bei x_0 hat f einen Wendepunkt")

Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente.

Aus $(\tilde{T})$ folgert man:

Satz 12 Es sei $f \in C^n([a,b])$, n ungerade, $n \geq 3$, $x_0 \in (a,b)$.

Aus $f^{(j)}(x_0) = 0 \; (j = 2, 3, \ldots, n-1)$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

folgt, dass f bei x_0 einen Wendepunkt besitzt.

15.5 Taylorreihe einer Funktion, Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein offenes Intervall und $x_0 \in I$. Ist $f \in C^\infty(I)$, so heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ die Taylorreihe zu f um x_0. Sie wird durch $T(f, x_0)(x)$ bezeichnet. Es ist also: $T(f,x_0)(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(f,x_0)(x)$.

Satz 13: Es ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ mit dem Konvergenzradius r gegeben. Für die durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ für $x \in I := \{x \mid |x-x_0| < r\}$ definierte Funktion f gelten:

a) $f \in C^\infty(I)$

b) Für $x \in I$ erhält man $f^{(j)}(x)$ $(j=1,2,\ldots)$ durch gliedweises Differenzieren der Reihe:

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+j)(k+j-1)\cdots(k+1)\, a_{k+j}\, (x-x_0)^k$$

(Alle diese Reihen haben denselben Konvergenzradius r)

c) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ ist die Taylorreihe von f: $f(x) = T(f,x_0)(x)$, $x \in I$.

Beispiele 1) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \dfrac{1}{1+x^2}$, $|x|<1$

2) Die für $|x|<1$ $(r=1)$ durch $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$ definierte Funktion f genügt der Differentialgleichung $(1+x) f'(x) = \alpha f(x)$, $|x|<1$ und $f(0) = 1$.

Hieraus folgt: $f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, $|x|<1$.

Satz 14 Ist f auf (a,b) beliebig oft diff'bar und $x_0 \in (a,b)$, dann konvergiert die Taylorreihe von f um x_0 gegen f genau für diejenigen $x \in (a,b)$, für die $R_n(x-x_0) \to 0$ $(n\to\infty)$ gilt (für diese x gilt also $T(f,x_0)(x) = f(x)$). Dies gilt sicher für alle $x \in (a,b)$, wenn es Konstanten A, B so gibt, dass $|f^{(n)}(x)| \le A B^n$ $\forall x \in (a,b)$ und $\forall n$ gilt.

Beispiel: Entwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0=0$.

Es gelten:

$$f(0)=0, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x)^n} \quad (n=1,2,\ldots),$$

so dass die Taylorreihe $T(f,0)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - + \ldots \text{ wird.}$$

Es gilt $T(f,0)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x)$ für diejenigen x, für die $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x) x^{n+1}$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

gilt. Das weist man hiermit für $-\frac{1}{2} \le x \le 1$ nach.

Es gilt darüber hinaus: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^{k-1} x^k$ für $-1 < x \le 1$.

Beispiel:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$
Es ist $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$,

und es gelten $f^{(j)}(0) = 0 \quad j = 0,1,2,\ldots$, so dass

$T(f,0)(x) = 0 \quad \forall x$ gilt. Die Taylorreihe von f konvergiert für alle x aber nur in $x=0$ gegen f.

Ü/Beispiel Entwickle $f(x) = \ln(x)$ $(x>0)$ um x_0 (>0):

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^{k-1} \frac{1}{x_0^k}(x-x_0)^k \quad (r = x_0)$$

gilt für $0 < x \le 2x_0$.

15.6 **Satz 15** (Die Regeln von de l'Hospital)

f, g seien auf (a, b) definiert und diff'bar. Es gelte $g'(x) \neq 0$ und $g(x) \neq 0$ auf $a < x < b$ ("bei b") und

$$\begin{cases} \text{1. Fall} & f(x) \to 0 \text{ und } g(x) \to 0 \text{ für } x \to b- \\ \text{2. Fall} & f(x) \to \infty \text{ und } g(x) \to \infty \text{ für } x \to b- \end{cases}$$

Für beide Fälle

Existiert $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$, und beide Grenzwerte sind gleich.

(Analoge Formulierung für $x \to a+$. $a = -\infty$ oder $b = \infty$ sind zugelassen. Ebenso darf $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ uneigentlich also $= +\infty$ oder $-\infty$ sein für die Gültigkeit des Satzes.)

Beispiele:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2$$
$$\lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad (\alpha > 0).$$

15.7 gegeben ist $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. gesucht ist $\xi \in I$ mit $g(\xi) = 0$.

Es sei ϕ eine beliebige auf I definierte Funktion, die dort nicht verschwindet. Definiere $f : I \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \phi(x) g(x) + x$, dann ist $g(\xi) = 0$ äquivalent mit $f(\xi) = \xi$. Anstelle von Nullstellen der Funktion g werden Fixpunkte der Funktion f berechnet.

Satz 16 (Fixpunktsatz)

$f:[a,b] \to [a,b]$ sei eine C^1-Funktion, die $|f'(x)| \le q$, $x \in [a,b]$, mit einer Zahl q, $0<q<1$, erfüllt.

Es gelten dann:

1) Es gibt genau ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi)=\xi$.

2) Die durch $x_0 \in [a,b]$ beliebig und $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=0,1,2,\dots)$ definierte Folge (x_n) konvergiert gegen ξ.

3) Es gelten die Fehlerabschätzungen:

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \quad , n=1,2,\dots$$