12. Woche Nachtrag

15.2

4) $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (a_k konst $\in \mathbb{C}$).

$p^{(j)}(0) = a_j\, j!$ $(j = 0, 1, \dots, n)$

Satz 3 (Kettenregel)

$I, J \subset \mathbb{R}$ seien Intervalle und $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{C}$ Funktionen mit: f ist in $x_0 \in I$ und g in $f(x_0) \in J$ diff'bar.
Dann ist $g \circ f$ in x_0 diff'bar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Beispiele: 1) $h(x) = e^{f(x)}$, $h'(x) = f'(x)\, e^{f(x)}$

2) $h(x) = \sin \frac{1}{x}$, $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$

3) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $h'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Bemerkung Es sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $f \in C^n(I) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f \in C^j(I)$ für $j = 0, 1, \dots, n$.

h aus 3) liegt in $C^0(I)$, ist überall diff'bar, gehört aber nicht zu $C^1(I)$

$f \in C^\infty(I) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f \in \bigcap_{j=0}^{\infty} C^j(I)$ ($f \in C^j(I)$ für jedes $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

Satz 4 I sei ein Intervall. $y = g(x)$ sei die Umkehrfunktion der stetigen bijektiven Funktion $x = f(y)$, $f: I \to J = f(I)$.
Ist f in $y_0 \in I$ diff'bar und gilt $f'(y_0) \neq 0$, so ist g in $x_0 := f(y_0)$ diff'bar mit

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \quad \text{bzw} \quad g'(f(y_0)) = \frac{1}{f'(y_0)}$$

Beispiele: 1) $g(x) = \ln x$ $(x > 0)$, $g'(x) = \frac{1}{x}$

2) $h(x) = \ln |f(x)|$, $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ $(f(x) \neq 0)$

3) $g(x) = \operatorname{Arctan}(x)$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Beispiele (zu Satz 16):

1/ gesucht: Nullstellen von $g(x) = e^x - 3x^2$. In $[0,1]$ liegen Nullstellen.

$g(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{x/2} =: f(x)$. Für f gelten

$f: [0,1] \to [0,1]$ und $|f'(x)| < \frac{1}{2}$ für $x \in [0,1]$.

2/ Formt man die Gleichung $g(x) = 0$ gemäß der Vorbemerkung 15.7 mit $\phi(x) = -\frac{1}{g'(x)}$ um, so erhält man die Fixpunktgleichung

$$x = x - \frac{g(x)}{g'(x)} \quad \text{und die Iterationsvorschrift}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots), \; x_0 \text{ beliebig}$$

(falls für $f(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ die Vor. von Satz 16 erfüllt sind).
Dieses Verfahren zur Nullstellenbestimmung ist das Newton-Verfahren.

Kapitel 16 Integralrechnung in einer reellen Variablen

16.1 $I = [a,b]$ sei beschränktes, abgeschlossenes Intervall

$f: [a,b]$ sei eine beschränkte Funktion.

Eine Zerlegung Z von I wird durch Punkte $x_1, \ldots, x_{n-1}$ mit $x_0 := a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b =: x_n$ gegeben.

Es sei $\|Z\| := \max\{|x_k - x_{k-1}|, k = 1, 2, \ldots, n\}$ ein Maß für die Feinheit von Z.

Mit $m_k := \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$ und $M_k = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ werden gebildet:

$$\omega(f, Z) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{Untersumme von } f \text{ zu } Z)$$

$$\Omega(f, Z) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \quad (\text{Obersumme von } f \text{ zu } Z)$$

und mit ξ_k (beliebig) $\in [x_{k-1}, x_k]$

$$\sigma(f, Z) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (\text{Zwischensumme von } f \text{ zu } Z)$$

Es gilt $\omega(f,Z) \le \sigma(f,Z) \le \Omega(f,Z)$.

Existieren für jede Zerlegungsfolge $(Z_n)_n$ von I mit $\|Z_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \omega(f,Z_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega(f,Z_n)$ und sind diese

Grenzwerte gleich, so heißt dieser gemeinsame Grenzwert <u>das bestimmte (Riemann-)Integral von f über $[a,b]$</u>, geschrieben $\int_a^b f(x)\,dx$. Wir sagen dann auch: f ist über $[a,b]$ integrierbar oder: das Integral von f über $[a,b]$ existiert. Für $f \ge 0$ gibt $\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt von $G = \{(x,y) \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le f(x)\}$ an.

Äquivalent können wir formulieren:

f ist über $[a,b]$ integrierbar $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z mit $\Omega(f,Z) - \omega(f,Z) < \varepsilon$.

Die Funktion
$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$
ist über $[0,1]$ nicht integrierbar.

Mit $R([a,b])$ werde die Menge der über $[a,b]$ integrierbaren Funktionen bezeichnet.

<u>Satz 1</u>: a) <u>$C^0([a,b]) \subset R([a,b])$</u>

b) <u>Ist f monoton auf $[a,b]$, so gilt $f \in R([a,b])$</u>.

<u>Satz 2</u>: <u>Ist f aus $R([a,b])$, so gilt</u>
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

<u>16.2</u> <u>Beispiele</u> $\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}$, $\int_0^b \cos x\,dx = \sin b$

16.3

1) $f \in R([a,b])$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2) $f, g \in R([a,b]),\ \lambda, \rho \in \mathbb{C} \to \lambda f + \rho g \in R([a,b])$

und $\int_a^b (\lambda f(x) + \rho g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \rho \int_a^b g(x)\,dx$

3) $f \in R([a,b]),\ \alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$

Beispiel: $\int_a^b x\,dx = \int_0^b x\,dx - \int_0^a x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

$\int_a^b \cos x\,dx = \int_0^b \cos x\,dx - \int_0^a \cos x\,dx = \sin b - \sin a$

16.4

f heißt auf $[a,b]$ <u>stückweise stetig</u>, falls f auf $[a,b] \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mit $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < b$ stetig ist, und falls $f|_{[a,a_1]}, f|_{[a_j,a_{j+1}]}$ $(j=1,\dots,n-1)$ und $f|_{[a_n,b]}$ stetig sind. Es wird dann definiert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx + \int_{a_n}^b f(x)\,dx .$$

16.5

1) $f \geq 0$ auf $[a,b]$, $f \in R([a,b])$: $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

$f \leq 0$ auf $[a,b]$, $f \in R([a,b])$: $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

2) $f, g \in R([a,b])$, $f(x) \leq g(x)$ $(a \leq x \leq b)$

$\to \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

3) $f \in R([a,b])$: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

4) (Erinnerung: $\|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f(x)|$ für $f \in C^0([a,b])$)

$$f, g \in C^0([a,b]): \quad \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_\infty \int_a^b |g(x)|\,dx$$

16.6 MWSIR

Satz 3 $f, g \in C^0([a,b])$; $f(x)$, $a \le x \le b$, wechselt das Vorzeichen nicht. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(\xi)\int_a^b f(x)\,dx$$

Spezialfall: $f = 1$: $\quad \int_a^b g(x)\,dx = g(\xi)(b-a)$

Es folgt: $\quad (b-a)\min_{[a,b]} g(x) \le \int_a^b g(x)\,dx \le (b-a)\max_{[a,b]} g(x)$

16.7 . $I \subset \mathbb{R}$ sei beschränktes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ sei beschränkte Funktion.

Def: F heißt Stammfunktion von f, falls F auf I diff'bar ist und falls $F'(x) = f(x)$, $x \in I$, erfüllt ist.

Satz 4 (Hauptsatz Diff'rechnung – Integralrechnung)
$f \in C^0([a,b])$, $c \in [a,b]$. Es gelten:

1) $F_c : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F_c(x) := \int_c^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion von f. Jede andere Stammfunktion F von f hat die Form $F = F_c + k$, k konstant.

2) Ist F Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b} = F(b) - F(a).$$

Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt das unbestimmte Integral von f. Wir schreiben dafür $\int^x f(t)\,dt$.

Also: $\int^x f(t)\,dt = \{ F \mid F'(x) = f(x),\ x \in I \}$

16.8 Satz 5 (Partielle Integration)

$f, g \in C^1([a,b])$. Es gilt

$$\int_a^x f(t) g'(t)\,dt = f(t) g(t) \Big|_{t=a}^{x} - \int_a^x f'(t) g(t)\,dt, \quad a \le x \le b.$$

Satz 6 (Substitutionsregel)

$g: [a,b] \to [c,d]$, $u = g(t)$, sei C^1-Funktion, $f \in C^0([c,d])$. Es gilt

$$\int_{g(a)}^{g(x)} f(u)\,du = \int_a^x f(g(t)) g'(t)\,dt, \quad a \le x \le b.$$

Beispiele: $\int_a^x g(t) g'(t)\,dt = \frac{1}{2}(g^2(x) - g^2(a))$ (z.B. mit Satz 5 oder Satz 6)

$$\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln|g(x)| - \ln|g(a)|$$

16.9 $$\int^x \frac{dt}{(t - z_0)^n} = \frac{1}{1-n}(x - z_0)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,\ x \in \mathbb{R},\ z_0 \in \mathbb{C}$$

$$\int^x \frac{dt}{t - z_0} = \ln|x - z_0|, \quad z_0 \in \mathbb{R}$$

Für $z_0 = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \ne 0$) gilt

$$\int^x \frac{dt}{t - z_0} = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right) + i \operatorname{Arctan} \frac{x-\alpha}{\beta}$$

16.10 Integration rationaler Funktionen. Partialbruchzerlegung

A1 Es sei a eine Nullstelle des Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \quad (c_k \in \mathbb{C},\ c_n \neq 0).$$

Dann gilt $f(x) = (x-a)\,g(x)$, wobei g ein Polynom vom Grade $n-1$ ist.