4.1 Die die reellen Zahlen definierenden Axiome

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ von Elementen $a, b, c, \dots$, die **reellen Zahlen** genannt, die durch die folgenden Eigenschaften definiert sind:

a) ("$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper")

Es gibt zwei innere Verknüpfungen

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (die Addition) und $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Multiplik.)

derart, dass $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind. In $(\mathbb{R}, +)$ ist 0 das neutrale Element (n) und $-a$ das zu a inverse Element. In $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist 1 das neutrale Element, a^{-1} das zu $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ inverse Element.

Es wird $1 \neq 0$ gefordert. Es gilt das Distributivgesetz:

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen: $a - b := a + (-b)$

$$\frac{a}{b} := ab^{-1} = b^{-1}a$$

b) (Anordnungsaxiome)

Durch eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ wird in $\mathbb{R}$ eine Anordnung wie folgt definiert:

(A1) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen:

$$a \in P, \quad -a \in P, \quad a = 0$$

(A2) Aus $a, b \in P$ folgt $a + b \in P$

(A3) Aus $a, b \in P$ folgt $ab \in P$

Bemerkungen: $a > 0 \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} a \in P$

$a > b$ oder $b < a \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} a - b \in P$

$a \leq b \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} a = b$ oder $a < b$

c) Vollständigkeitsaxiom (Formulierung später).

Zu a) Hieraus folgen alle Regeln über das Rechnen mit Gleichungen. Beispiele:

Satz 1: Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung
$a + x = b$ eindeutig lösbar.
(Für beliebige $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung
$ax = b$ eindeutig lösbar)

Satz 2: 1) Das Negative und das Inverse sind eindeutig bestimmt.
2) $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
3) Aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.
4) Es gilt $(-1)(-1) = 1$.

Zu b) Folgerungen aus (A 1), (A 2), (A 3). Rechnen mit Ungleichungen

Satz 3 a, b, c sind reelle Zahlen.
1) Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$.
2) Aus $a > b$ folgt für jedes $c \in \mathbb{R}$: $a + c > b + c$.
3) Aus $a > b$ und $c < 0$ folgt $ac < bc$.
4) Wenn für $a, b \in \mathbb{R}$ für alle $\varepsilon > 0$ $a \leq b + \varepsilon$ gilt, so folgt $a \leq b$.

Beispiele: 1) Die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ gilt genau für alle $x > 0$.
2) Es sei $x > 0$, $y > 0$. Dann gilt
$(x < y) \iff (x^2 < y^2)$
3) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $(x < y) \to (x < \frac{x+y}{2} < y)$.

Zu c) Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (unten) beschränkt, falls es eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $y \leq x$ $(x \leq y)$ $\forall y \in M$ gibt. Wir schreiben hierfür in diesem Kapitel $M \leq x$ $(x \leq M)$. x heißt obere Schranke (untere Schranke) von M.

M heißt beschränkt, wenn M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Eine Funktion $f: M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls $R(f)$ beschränkt ist.

x heißt Maximum (Minimum) der Menge M:

$$x = \max(M) \quad (\min(M)) \overset{Def}{\Longleftrightarrow} \quad x \in M \text{ und } M \le x \quad (x \le M)$$

Beispiel: Die Menge $\{x \mid a \le x < b\}$ besitzt das Minimum a. Sie besitzt kein Maximum.

Ü: Es gelten: 1) Aus $M \subset N \subset \mathbb{R}$ folgen: $\max(M) \le \max(N)$
$\min(N) \le \min(M)$

2) $\max(M \cup N) = \max(\max(M), \max(N))$
$\min(M \cup N) = \min(\min(M), \min(N))$

3) Mit $-M := \{x \mid -x \in M\}$ gilt

$$\min(M) = -\max(-M).$$

$M \subset \mathbb{R}$.

g heißt Supremum von M: $g = \sup(M)$, falls g kleinste obere Schranke von M ist:

$$g = \sup(M) \overset{Def}{\Longleftrightarrow} 1)\ M \le g,\ 2) \text{ Aus } M \le s \text{ folgt } g \le s.$$

Das Infimum von M: $\inf(M)$ wird so definiert:

$$\inf(M) := -\sup(-M).$$

Es gilt $\inf(M)$ ist größte untere Schranke von M:

1) $\inf(M) \le M$, 2) Aus $s \le M$ folgt $s \le \inf(M)$.

Satz 4: $g = \sup(M) \Longleftrightarrow$ a) $M \le g$
b) Aus $\tilde{g} < g$ folgt: es gibt $x \in M$ mit $\tilde{g} < x \, (\le g)$.

Bemerkungen: 1) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt höchstens ein Supremum.

2) Existiert $\max(M)$, so gilt $\max(M) = \sup(M)$.

3) Ü: Formuliere den zu Satz 4 analogen Satz für $\inf(M)$.

(V) Das Vollständigkeitsaxiom

Jede nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$, die nach oben beschränkt ist, besitzt ein Supremum, d.h.: es gibt $\Gamma \in \mathbb{R}$ mit $\Gamma = \sup(M)$.

Ü: Zeige: Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum.

4.2

Folgerungen aus (V)

Satz 5 $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Satz 5 Zu jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, gilt.

Satz 6 Zu jeder positiven Zahl ε gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Satz 7 Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $1 < y - x$ gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < k < y$.

Satz 8 Zu zwei Zahlen x, y mit $x < y$ gibt es eine rationale Zahl r mit $x < r < y$.

Folgerung Zu zwei Zahlen x, y mit $x < y$ gibt es eine irrationale Zahl ξ mit $x < \xi < y$.

Satz 9 Die rationalen Zahlen genügen dem Axiom (V) nicht: Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ und } x^2 < 2\}$ besitzt das Supremum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ $(x \in I)$ sei eine gegebene Funktion.

f heißt streng monoton wachsend (fallend), wenn aus $x_1, x_2 \in I$ und $x_1 < x_2$ folgt: $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Wir schreiben $f \uparrow$ $(f \downarrow)$.

A1 : $f\uparrow \longleftrightarrow f\downarrow$

A2 : $f\uparrow \longleftrightarrow (f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2) > 0$ $\quad \forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$

$\longleftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$

$f\downarrow \longleftrightarrow (f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2) < 0$

A3 : $f\uparrow \rightarrow f$ ist injektiv

$f\uparrow \rightarrow f^{-1}\uparrow$

Kapitel 5 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Vollständige Induktion VI

(Σ-, Π-Zeichen, Binomialkoeffizient, Permutationen, Kombinationen).

5.1 Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, wenn

1) "$1 \in M$" und 2) "aus $x \in M$ folgt $x+1 \in M$"

erfüllt sind.

Beispiele: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ sind induktive Mengen

5.2 $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

(= $\mathbb{N}$ ist der Durchschnitt aller induktiven Mengen reeller Zahlen)

5.3 Induktionssatz

Jede induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist ganz $\mathbb{N}$.

oder: Gelten für eine Menge $M \subset \mathbb{N}$

1) $1 \in M$ und 2) aus $n \in M$ folgt $n+1 \in M$,

dann folgt $M = \mathbb{N}$.

5.4 Rekursive Definition

Es sei $G(n)$ ein Ausdruck, der von natürlichen Zahlen abhängt. 5.3 $\rightarrow$ Hat man $G(1)$ definiert, und hat man $G(n+1)$ definiert, falls $G(n)$ schon definiert war, dann ist $G(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Beispiele: 1) Definition von $n!$ für $n \in \mathbb{N}$: (Fakultät)

$$1! := 1 \quad , \quad (n+1)! := (n+1)\, n!$$

2) $\prod_{k=1}^{n} a_k$ wird für $n \in \mathbb{N}$ so definiert: (Produktzeichen)

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1 \;,\; \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}$$

(Es gilt $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.)

3) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ wird für $n \in \mathbb{N}$ durch $\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$ und $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$ definiert. (Summenzeichen)

5.5 Beweismethode: Vollständige Induktion (VI)

Es soll nachgewiesen werden, dass die Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig sind.

1. Schritt: Induktionsanfang: Zeige, dass $A(1)$ richtig ist.

2. Schritt: Induktionsschluss (Schluss von n auf $n+1$)

Setze voraus, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ richtig ist. (Induktionsvoraussetzung)

Folgere hieraus, dass $A(n+1)$ richtig ist. (Induktionsbeweis)

Nach dem Induktionssatz 5.3 folgt dann, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

Beispiele: 1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

2) Für beliebige Zahlen x_j $(j=1,\dots,n)$, die alle gleiches Vorzeichen haben und alle ≥ -1 sind, gilt:

$$\prod_{j=1}^{n} (1+x_j) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k \;,\; n \in \mathbb{N}$$

Folgerung: Die Ungleichung von Bernoulli

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + n x.$$