3) (geometrische Summe)

Für $q \neq 1$ und $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt $\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

4) (Teleskopsumme)

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j+1}) = a_1 - a_{n+1}, \quad \sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{n-k} - a_{n-k-1}) = a_n - a_0.$$

5.6 (Permutationen von n Elementen)

Satz 1 Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus n verschiedenen Elementen $a_1, \dots, a_n$ lassen sich $P_n = n!$ n-Tupel $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ so bilden, dass in jedem Tupel jedes der gegebenen Elemente vorkommt.

(Es sei M eine Menge, die n Elemente enthält. Es gibt $n!$ bijektive Funktionen von M nach M.)

5.7 Binomialkoeffizienten

$$\alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}: \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (\alpha - l) = \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha - j + 1}{j} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{mit } \binom{\alpha}{0} := 1$$

Es gilt $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$

$$\alpha = n \in \mathbb{N}: \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad (k \leq n)$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad (k > n), \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Satz 2: Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Eine n elementige Menge besitzt $K_n^k := \binom{n}{k}$ k elementige Teilmengen.

5.8 Der Binomische Satz

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k}.$$

Folgerungen: $2^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$0 = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s}$, $n = 1, 2, \ldots$

Kapitel 6 Der Betrag einer reellen Zahl. Wichtige Ungleichungen

Def: $x \in \mathbb{R} \rightarrow |x| := \begin{Bmatrix} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{Bmatrix} = \max(x, -x)$

Satz 1: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten:

a) $-|x| \leq x \leq |x|$, b) $|x| \geq 0$ und $= 0$ nur, wenn $x = 0$

c) $|xy| = |x||y|$ ($\rightarrow |x^2| = |x|^2 = x^2 \rightarrow |x| = \sqrt{x^2}$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$)

d) (Dreiecksungleichung)

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

e) $(|x| \leq |y|) \longleftrightarrow (x^2 \leq y^2)$

Satz 2 Es seien $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gelten:

$|x - a| \leq \varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon \leq x - a \leq \varepsilon \longleftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon.$

(Die Menge $\{x \mid |x-a| \leq \varepsilon\}$ werden wir ε-Umgebung von a nennen und durch $U_\varepsilon(a)$ bezeichnen)

Satz 3 (GAM-Ungleichung. Ungleichung zwischen dem geometr. und arithmetischen Mittel)

a) $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x+y)$, $x \geq 0, y \geq 0$

b) $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x, y \in \mathbb{R}$

(Verallgemeinerung: 3. Übblatt, T3)

Satz 4 (Schwarzsche Ungleichung)

Für beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_k$, $b_1, b_2, \dots, b_k$ gilt

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j b_j| \le \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{k} b_j^2\right)^{1/2}.$$

Satz 5 (Dreiecksungleichung)

Für beliebige reelle Zahlen a_j, b_j $(j = 1, 2, \dots, k)$ gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{k} (a_j + b_j)^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^{k} a_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{k} b_j^2\right)^{1/2}$$

Kapitel 7 Die komplexen Zahlen

Die imaginäre Einheit i ist durch $i^2 = -1$ gegeben.
Es ist $i \notin \mathbb{R}$.

$\mathbb{C} := \{ z \mid z = x + iy,\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$ ist der Körper der komplexen Zahlen mit $\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x + i0, x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{C}$, mit der Addition

$$z = x+iy,\ w = u+iv\ (x,y,u,v \in \mathbb{R}) \to z + w := (x+u) + i(y+v)$$

und der Multiplikation

$$z = x+iy,\ w = u+iv \to zw := (xu - yv) + i(yu + xv)$$

Mit $0 := 0 + i0$ mit $z + 0 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
mit $1 := 1 + i0$ mit $z1 = 1z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
mit $-z = -x - iy$ mit $z + (-z) = 0$ und

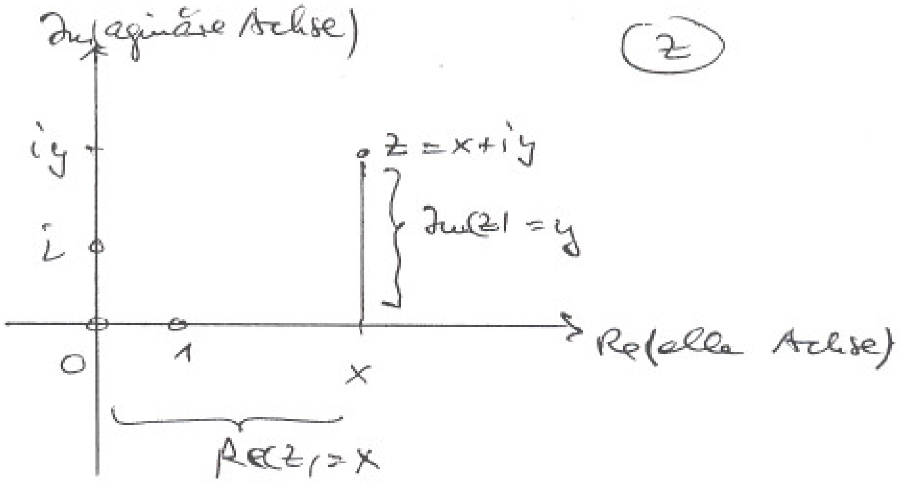
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{mit} \quad z \cdot \frac{1}{z} = 1 \quad \text{und } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Es gilt für $z = x + iy$ und $w = u + iv$

$$z = w \iff x = u \text{ und } y = v$$

x heißt Realteil, y Imaginärteil von z: $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.
Es ist $z = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$.
Wir haben die eineindeutige Beziehung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \quad : z \to (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$$



$|z| =$ <u>Betrag von z</u> $=$ Abstand z zum Nullpunkt
$= \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

$\Rightarrow \quad -|z| \le \mathrm{Re}(z) \le |z| \quad , \quad -|z| \le \mathrm{Im}(z) \le |z|$

$\Leftrightarrow \quad |\mathrm{Re}(z)| \le |z| \quad , \quad |\mathrm{Im}(z)| \le |z|$

$z = x + iy$: $\quad \bar{z} := x - iy$ heißt die zu z <u>konjugierte komplexe Zahl</u>

$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z) \quad , \quad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

$z\bar{z} = |z|^2 \quad , \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad , \quad |z| = |\bar{z}| = |-z|$

$\Rightarrow$: $\quad z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$

$\bar{\bar{z}} = z$

$z, w \in \mathbb{C}$: $\quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad$ (nachrechnen)

Man hat $\quad \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad , \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

$z = \bar{z} \quad (z = -\bar{z})$ ist eine Gleichung für die reelle (imaginäre) Achse.