Satz 1: $w, z \in \mathbb{C}$. Es gelten:

a) $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$ $\quad (z \neq 0)$

b) $|wz| = |w||z|$, $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$ $\quad (z \neq 0)$

c) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ $\left(\leftrightarrow \; -|z| \leq \begin{Bmatrix} \pm \mathrm{Re}(z) \\ \pm \mathrm{Im}(z) \end{Bmatrix} \leq |z|\right)$

d) $|w \pm z|^2 = |w|^2 + |z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$

e) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung), $\big||z| - |w|\big| \leq |z \pm w|$

Ü: Gegeben ist $z = x + iy$. Gesucht ist $w = u + iv$ mit $w^2 = z$.

Ergebnis: 1) $z = x \leq 0$: $\quad w = \pm i\sqrt{-x}$

2) $z = x \geq 0$: $\quad w = \pm\sqrt{x}$

3) $y \neq 0$: $\quad w = u + i\frac{y}{2u}$

mit $u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(x + |z|)}$

Beispiel: $z = i$. $\quad w = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$

7.3 Polardarstellung komplexer Zahlen

Es sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Es gibt genau eine reelle Zahl φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$, so dass gilt: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
φ heißt das Argument von z: $\arg(z)$. Diese Darstellung von z ist die Polardarstellung von z im Unterschied zu der vorher ~~be~~sprochenen kartesischen Darstellung $z = x + iy$.

Satz 2: Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ kann in der Form $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ dargestellt werden, wobei $r = |z|$ und $\psi = \arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ sind.

Satz 3: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$ seien aus $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Es gelten:

a) $z = w \iff r = \varrho$ und $\varphi = \psi + 2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

b) $\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1}$

$(\arg(\bar{z}) = 2\pi - \arg(z))$

c) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

d) $zw = r\varrho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$

e) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, $n\in\mathbb{Z}$

7.4 (Anwendung von 7.3)

Satz 4: Es seien $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ und $n\in\mathbb{N}$ gegeben.
Die Gleichung $z^n = a$ hat genau n verschiedene Lösungen und zwar

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Hierbei ist $\alpha = \arg(a)$ und $\arg(z_k) = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.
Wir schreiben auch $(\sqrt[n]{a})_k := z_k$.

Bemerkung: In der komplexen z-Ebene bilden die z_k die Ecken des regelmäßigen n-Ecks, dessen Ecken auf dem Kreis um 0 mit dem Radius $\sqrt[n]{|a|}$ liegen und dessen eine Ecke $\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)$ ist.

Beispiele (die Polardarstellung ist zu finden, die Zahlen sind in der komplexen Ebene zu skizzieren)

$z^n = 1$, $z^3 = -i$, $(\sqrt[4]{1+i})_k$, $(\sqrt{-4})_k$; gegeben sind $a, b\in\mathbb{C}$: gesucht sind $z\in\mathbb{C}$ mit $z^2 + 2az + b = 0$.

Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen gibt es nicht.

Kapitel 8 Vektorrechnung (Beginn von "Lineare Algebra")

8.1 Die Menge $V \neq \phi$ heißt <u>komplexer (reeller) Vektorraum</u> (VR), wenn es in V

1) eine Abbildung "+": $V \times V \to V$ so gibt, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist

2) eine Abbildung (<u>skalare Multiplikation</u> genannt)

$\mathbb{C} \times V \ (\mathbb{R} \times V) \longrightarrow V \qquad : (\alpha, x) \in \mathbb{C} \times V \to \alpha x \in V$

gibt, die die folgenden Eigenschaften hat:

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R}),\ x \in V$$
$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R}),\ x \in V$$
$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \qquad \alpha \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R}),\ x, y \in V$$
$$1x = x \qquad x \in V$$

<u>Beispiele</u>: 1. $(\mathbb{C}, +)$ ist reeller VR

2. Der Funktionenraum $\mathcal{F} = \{ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{C} \}$ wird komplexer VR durch:

$f, g \in \mathcal{F} \to f+g \in \mathcal{F}$ mit $(f+g)(x) := f(x) + g(x),\ x \in [0,1]$

$\alpha \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{F} \to \alpha f \in \mathcal{F}$ mit $(\alpha f)(x) := \alpha f(x),\ x \in [0,1]$

3. $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{C}^n = \left\{ \vec{a} \mid \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_j \in \mathbb{C} \right\}$

wird ein komplexer VR gemäß:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \to \vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{C}, \vec{a} \in \mathbb{C}^n \longrightarrow \lambda \vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

8.2 Es sei V ein komplexer VR. Ein Ausdruck der Form

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_n \in V$

heißt Linearkombination der Vektoren $x_1, \dots, x_n$. (LK)

$x_1, \dots, x_n \in V$ heißen linear unabhängig (l.u.), falls

aus $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Sind $x_1, \dots, x_n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie linear abhängig (l.a.): es gibt dann eine LK der 0, also $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$, wobei nicht alle λ_j gleich Null sind.

Bemerkungen 1) $x_1, x_2, \dots, 0, x_l, \dots$ sind l.a.

2) Sind $x_1, x_2, \dots, x_k$ l.u., so sind $x_1, \dots, x_l$ $(l \leq k-1)$ l.u.

3) Sind $x_1, \dots, x_k$ l.a., so sind $x_1, \dots, x_l$ $(l \geq k)$ l.a.

8.3 $\vec{a}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ seien Elemente des $\mathbb{R}^4$.

$G_{\vec{a},\vec{u}}$: Gerade durch $\vec{a}$ in Richtung $\vec{u}$ wird dargestellt durch

$\vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$ (für jedes t ist das der Ortsvektor eines Punktes der Geraden)

(Parameterdarstellung der Geraden)

Gerade durch die Punkte mit den Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}$:

$\vec{x}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$.

$\vec{a} \in \mathbb{R}^4$; $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^4$, $\vec{u}, \vec{v}$ l.u.

$E_{\vec{a};\vec{u},\vec{v}}$: Ebene durch $\vec{a}$, die von $\vec{u}, \vec{v}$ aufgespannt wird:

$$\vec{x}(s,t) = \vec{a} + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

(Parameterdarstellung der Ebene)

$E_{\vec{a};\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{a}}$: Ebene durch die drei Punkte A, B, C mit den Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

8.4 Skalarprodukt, Norm

1/ Im $\mathbb{R}^n$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \eta_\nu$

Skalarprodukt zwischen $\vec{x}, \vec{y}$

Man sieht leicht ein, dass gelten:

(S1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$; $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

(S2) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$; $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$

(S3) $\lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$; $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

(S4) $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0 \iff \vec{x} \neq \vec{0}$

und für $\|\vec{x}\| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \; \left(= \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2} \right)$ (die Norm von $\vec{x}$) (die „Länge" von $\vec{x}$)

hat man (N1) $\|\vec{x}\| > 0 \iff \vec{x} \neq \vec{0}$

(N2) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

(N3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ $\quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

((N3): siehe Kapitel 6 / Satz 5).

2/ In Verallgemeinerung zu 1/ wird definiert:

Es sei V ein reeller VR. Eine Abbildung

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad : (x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

mit den Eigenschaften (S1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $x, y \in V$

(S2) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $x, y, z \in V$

(S3) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$, $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

(S4) $\langle x, x \rangle > 0 \iff x \neq 0$

heißt Skalarprodukt auf V. Ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt euklidischer VR.

Der Vergleich mit 1/ zeigt: Definiert man im $\mathbb{R}^n$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x} \cdot \vec{y}$, so liegt im $\mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt vor.

Der $\mathbb{R}^n$ ist ein euklidischer VR.