Ist V ein reeller VR, so heißt jede Funktion

$$V \to \mathbb{R}_+ \quad : x \to \|x\| \qquad \underline{\text{eine Norm auf } V}, \text{ falls}$$

erfüllt sind: <u>(N1)</u> $\|v\| > 0 \Longleftrightarrow v \neq 0$

<u>(N2)</u> $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \, v \in V$

<u>(N3)</u> $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad v, w \in V.$

In diesem Sinn (siehe 1) oben) ist $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$.
Der Betrag in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$ ist jeweils eine Norm auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.
Im $\mathbb{R}^n$ sind $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \to \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}$

und $\vec{x} \to \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$ weitere Normen.

3) Zum <u>Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$</u>

– $\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm 2\, \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2$

anschaulich $\rightarrow$: $\vec{x} \perp \vec{y}$ (orthogonal) $\Longleftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

– $\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Stelle} \quad : \quad \text{Mit } \delta_{jk} := \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$

gelten $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk}$: Das System $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ $(\in \mathbb{R}^n)$
heißt <u>orthonormiert</u>.

– $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = (\xi_j)_{j=1,\ldots,n} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} (\vec{x} \cdot \vec{e}_j)\, \vec{e}_j$

– $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cos(\sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}))$

– Hat $\vec{x}$ die Länge 1, so gibt $|\vec{x} \cdot \vec{y}|$ die Länge der orthogonalen Projektion von $\vec{y}$ auf $\vec{x}$ an.

8.5 **Satz 1** (Hesse Normalform der Geradengleichung)

Es seien $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{n}\| = 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.

Die Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, die der Gleichung $\underline{\vec{x} \cdot \vec{n} = \alpha}$ genügen, sind die Ortsvektoren der Punkte der Geraden g mit Richtung $\vec{m}$ ($\perp \vec{n}$) etwa durch den Punkt mit Ortsvektor $\alpha \vec{n}$.

Satz 2 (Hesse Normalform der Ebenengleichung)

Es seien $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{n}\| = 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.

Durch $\underline{\vec{x} \cdot \vec{n} = \alpha}$ werden die Punkte der Ebene E mit Normalenrichtung $\vec{n}$ beschrieben, auf der etwa der Punkt $\alpha \vec{n}$ liegt.

Satz 3 g (E) sei in Hesse Normalform gegeben:

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \alpha.$$

$d : \mathbb{R}^2 \ (\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ sei die Funktion $d(\vec{y}) := \vec{y} \cdot \vec{n} - \alpha$.

Hierfür gelten:

1) $d(\vec{y}) = 0 \iff \vec{y} \in g \ (E)$

2) Liegen $\vec{y}$ und $\vec{0}$ auf $\left\{ \begin{matrix} \text{verschiedenen Seiten} \\ \text{derselben Seite} \end{matrix} \right\}$ von g (E), so gibt $\left\{ \begin{matrix} d(\vec{y}) \\ -d(\vec{y}) \end{matrix} \right\}$ den Abstand von $\vec{y}$ zu g (E) an.

8.6 **Das Vektorprodukt** ($\mathbb{R}^3$)

ordnet zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ den Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ wie folgt zu:

1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

2) Mit $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ ist $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi$

3) Falls $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, so bilden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechte Hand Regel, Korkenzieherregel).

Eigenschaften von $\vec{a} \times \vec{b}$

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

3. $\| \vec{a} \times \vec{b} \|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

4. $\| \vec{a} \times \vec{b} \|$ = Flächeninhalt des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

5. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ Spatprodukt

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

$= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$

Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem, so gilt

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ = Volumen des Spates (Parallelflachs), das von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird.

6. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

7. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

$(\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}_2, \vec{c})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)$

8. $\vec{a}, \vec{b}$ sind l.a. $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

9. Satz 4: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind l.a. $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

10. Entwicklungssatz (Grassmann Identität)

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

11. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ Jacobi Identität

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Lagrange Identität

11. sind Folgerungen aus 10.

Weiter gilt $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{d},\vec{a},\vec{b})\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$. Schreibt man analog $(\vec{c}\times\vec{d})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ auf und addiert beide Gleichungen, so erhält man: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d} = (\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a} + (\vec{d},\vec{c},\vec{a})\vec{b} + (\vec{d},\vec{a},\vec{b})\vec{c}$

(Je vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind l.a.)

Setzt man hier $\vec{d}=\vec{x}$, $\vec{a}=\vec{e}_1$, $\vec{b}=\vec{e}_2$, $\vec{c}=\vec{e}_3$, so folgt:

$$\vec{x} = (\vec{e}_1\cdot\vec{x})\vec{e}_1 + (\vec{e}_2\cdot\vec{x})\vec{e}_2 + (\vec{e}_3\cdot\vec{x})\vec{e}_3$$

(siehe 8.4, 3)).

Hier wird benötigt:
$$\left.\begin{array}{l}\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3,\ \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1,\ \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2 \\ \text{und } (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=1.\end{array}\right\}\ \boxed{*}$$

12. Mit $\boxed{*}$ vorher und $\vec{a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\sum_{\nu=1}^{3}\alpha_\nu\vec{e}_\nu$, $\vec{b}=\sum_{k=1}^{3}\beta_k\vec{e}_k$, $\vec{c}=\sum_{\ell=1}^{3}\gamma_\ell\vec{e}_\ell$ rechnet man nach:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{pmatrix}.$$ Hiermit und mit der Koordinatendarstellung des Skalarprodukts beweist man 10.

Ebenso leicht rechnet man nach:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \alpha_1\beta_2\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_3-\alpha_3\beta_2\gamma_1-\alpha_1\beta_3\gamma_2$$

(Hierfür werden wir in HM II $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ schreiben).

Kapitel 9 Folgen und Grenzwerte

9.1 Erinnerung an $\sup(M)$, $\inf(M)$ für eine Menge $M\subset\mathbb{R}$ und an das Vollständigkeitsaxiom für die reellen Zahlen. Und an Monotonie für Funktionen. (Kapitel 4)

$f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls die Menge $f(D)\subset\mathbb{R}$ beschränkt ist, falls es also eine Zahl K so gibt, dass für alle $x\in D$ $|f(x)|\leq K$ erfüllt ist.

Ergänzung: Das Symbol "∞". Es sei $M \subset \mathbb{R}$.

Wir schreiben $\sup(M) = \infty$ ($\inf(M) = -\infty$), falls M nicht nach oben (unten) beschränkt ist. Also etwa: "$\sup(M) = \infty$" bedeutet: Zu jeder Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt es Elemente $x \in M$ mit $x > K$.

∞, $-\infty$ sind keine Zahlen. Es sind Symbole, mit denen wie folgt gerechnet wird:

Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < x < \infty$,

für $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ gelten: $\frac{x}{0} := \infty + \infty := \infty \cdot \infty := \infty + y := \infty \cdot x := \infty$

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)\infty = -\infty$$

für $x < 0$, $y \in \mathbb{R}$ gelten: $y - \infty = x \cdot \infty = \frac{x}{0} = -\infty$

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad \frac{x}{\pm\infty} = 0$, $\infty - (-\infty) = \infty$, $(-\infty)(-\infty) = \infty$.

Nicht erfasst sind Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0, deren Wert vom jeweiligen Kontext abhängt. Diese Terme heißen unbestimmte Ausdrücke.