9.2 <u>Definition</u>: Eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) heißt <u>komplexe (reelle) Zahlenfolge</u>. Die Funktionswerte $f(n) =: a_n$ heißen die Glieder der Folge. Wir bezeichnen die Folge durch (a_n).

Ist $\nu: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion, so heißt (b_j) mit $b_j = a_{\nu(j)}$ $(j = 1, 2, \dots)$ <u>Teilfolge der Folge (a_n)</u>. (Es gilt $\nu(j) \geq j \;\; \forall j$).

<u>Beispiele</u>: $\nu(j) = 2j$, $\nu(j) = 2j-1$, $\nu(j) = 2^j$,
$\nu(j) = 4j+1$. (Ü: Schreiben Sie die Glieder der jeweiligen Teilfolge auf)

<u>Bemerkung</u>: Jede Folge hat unendlich viele Glieder.

<u>Definition</u>: Die reelle Folge (a_n) heißt (<u>streng</u>)

{ <u>monoton wachsend</u> — $(a_n)\uparrow$ —, falls $a_n \overset{<}{\leq} a_{n+1}$ $\forall n$
<u>monoton fallend</u> — $(a_n)\downarrow$ —, falls $a_{n+1} \overset{<}{\leq} a_n$ $\forall n$ gilt

<u>Definition</u>: Die reelle Folge (a_n) heißt <u>nach oben (unten) beschränkt</u>, falls es eine Zahl S so gibt, dass

$$a_n \leq S \qquad (S \leq a_n) \quad \forall n \qquad \text{gilt.}$$

<u>Definition</u>: Die Folge (a_n) heißt <u>beschränkt</u>, falls es eine Zahl S so gibt, dass $|a_n| \leq S \;\; \forall n$ gilt.

<u>Beispiel</u>: Die Folge (a_n), $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (diese Folge heißt harmonische Reihe), ist nach unten etwa durch 1 beschränkt, sie ist nach oben unbeschränkt (argumentiere mit Aufg. 4.3c) <u>von 3. Ü.blatt</u>).

9.3 Erinnerung an die geometrische Bedeutung von $\{x \mid |x-a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}$ $(x, a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)$ und von $\{z \mid |z-a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$ $(z, a \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0)$, an die Bernoullische Ungleichung (Abschnitt <u>5.5</u>), an die Sätze 5 u. 6

aus Abschnitt 4.2.

<u>Folgerung 1</u>: Zu $y > 1$ und $x > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $y^n > x$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

<u>Folgerung 2</u>: Zu $\varepsilon > 0$ und q mit $0 < q < 1$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $q^n < \varepsilon$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

<u>9.4</u> <u>Definition</u> (Häufungspunkt (HP))

$c \in \mathbb{C}$ heißt <u>Häufungspunkt (HP)</u> der Folge (a_n), falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - c| < \varepsilon$ für unendlich viele Indizes n erfüllt ist

("in jeder Umgebung von c liegen unendlich viele Folgenglieder")

<u>Definition</u>

Ist die reelle Folge (a_n) nicht nach oben (unten) beschränkt (d.h. $\sup\{a_j, j = 1, 2 \dots\} = \infty$ $(\inf\{a_j, j = 1, 2 \dots\} = -\infty)$), so heißt <u>$+\infty$</u> <u>$(-\infty)$</u> <u>uneigentlicher HP</u> der Folge.

<u>Satz 1</u> (Satz von Bolzano-Weierstrass)

<u>Jede reelle Folge besitzt einen (eigentlichen oder uneigentlichen) HP.</u>

<u>Jede beschränkte Folge besitzt einen HP.</u>

Ist (a_n) eine reelle Folge, so heißt der größte (kleinste) HP <u>$\limsup (a_n)$</u> (<u>$\liminf (a_n)$</u>)

Es gilt $H_G = \limsup (a_n)$ genau dann, wenn:

für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $a_n > H_G + \varepsilon$ für höchstens endlich viele Indizes n

und $a_n > H_G - \varepsilon$ für unendlich viele Indizes n

Ü: Formuliere dies analog für $\liminf (a_n)$.

Definition (Konvergenz, Grenzwert)

Ist die Folge (a_n) beschränkt und besitzt sie genau einen HP g, so heißt die Folge (a_n) <u>konvergent</u> und g heißt ihr <u>Grenzwert</u>. Wir schreiben: „$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$" oder auch „$a_n \to g \quad (n\to\infty)$".

Hat man für eine reelle Folge (a_n) $\limsup(a_n) = \liminf(a_n) = +\infty \quad (-\infty)$, so heißt (a_n) <u>bestimmt divergent</u> bzw. <u>uneigentlich konvergent</u> gegen $+\infty \ (-\infty)$.

Die Folge ist <u>divergent</u>, wenn sie weder konvergent noch bestimmt divergent ist (wenn sie also in jedem Sinn mehr als einen HP hat).

(a_n): $a_n = 2^n$, $= n$, $= n^k \ (k\in\mathbb{N})$ sind bestimmt divergente,

$a_n = (-1)^n$, $= i^n$, $= n(-1)^n$ sind divergente Folgen.

Satz 2 (Umformulierung der obigen Konvergenzdefinition)

<u>Es gilt $\quad a_n \to g \quad (n\to\infty)$</u>

$\Longleftrightarrow$

<u>Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ derart, dass aus $n \geq N(\varepsilon)$ folgt: $|a_n - g| < \varepsilon$</u>

(<u>d.h.</u>: In jeder Umgebung von g liegen alle Folgenglieder bis auf eventuell die endlich vielen $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$: das sind <u>fast alle</u> Folgenglieder)

Beispiele: 1/ (a_n): $\underline{a_n = \frac{\lambda}{n}}$ $(\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0)$

$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ (Abschnitt 9.3)

2/ (a_n): $\underline{a_n = q^n}$ (Abschnitt 9.3)

$a_n \to 1$ $(n \to \infty)$ $q = 1$

$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ $q = 0$

$a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. $q > 1$ (bestimmt divergent)

(a_n) divergent $q \leq -1$ (zwei HP)

$q \in \mathbb{C}$: $0 < |q| < 1$: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$

Ü: Untersuche $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$.

Satz 3 Die reelle Folge (a_n) sei monoton wachsend und nach oben beschränkt (monoton fallend und nach unten beschränkt). Die Folge ist dann konvergent, und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Beispiele: 1/ (a_n): $\underline{a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 2}}$ $(n = 1, 2, \dots)$

Aus $a_{n+1} - a_n = \frac{2 - a_n^2}{a_n + 2}$ sieht man: $(a_n) \uparrow$ und aus

$2 - a_{n+1}^2 = \frac{2}{(a_n+2)^2}(2 - a_n^2)$ folgt: $a_n < \sqrt{2}$ $\forall n$.

Die rekursiv definierte Folge ist also konvergent.

2/ Die Folge (a_n): $\underline{a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ ist monoton wachsend und nach oben unbeschränkt. Die Folge ist bestimmt divergent: $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Beispiel: Aus $a_n \to g$ $(n \to \infty)$ und $g \neq 0$ folgt, dass für fast alle Indizes n gilt: $a_n \neq 0$.

9.5 Rechnen mit konvergenten Folgen

Satz 4: (a_n), (b_n) seien konvergente Folgen: $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$. Es gelte $a_n \leq b_n$ für fast alle n. Dann gilt: $a \leq b$.

Satz 5: Aus $a_n \to g$ $(n \to \infty)$, $c_n \to g$ $(n \to \infty)$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle n folgt: Die Folge (b_n) ist konvergent mit dem Grenzwert g.

Folgerung: Aus $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n und $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt: $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Satz 6 (a_n), (b_n) seien konvergente Folgen: $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$. Dann sind die Folgen $(a_n \pm b_n)$, $(a_n b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ $(b \neq 0)$, $(|a_n|)$, (a_n^k) $(k \in \mathbb{N}$ fest$)$, $(\sqrt{a_n})$ $(a_n > 0)$ konvergent, und man hat:
$a_n \pm b_n \to a \pm b$, $a_n b_n \to a b$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, $|a_n| \to |a|$, $a_n^k \to a^k$, $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ (jeweils für $n \to \infty$).

Beispiele 1. $c > 0$ sei feste Zahl. Es gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$ $(n \to \infty)$

2. $\sqrt[n]{n} \to 1$ $\quad (n \to \infty)$

3. $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} =: \sum_{k=0}^{\infty} q^k$

(geometrische Reihe)

Satz 7 (über die Intervallschachtelung)

$(a_n)\uparrow$, $(b_n)\downarrow$ seien monotone Zahlenfolgen, die den Bedingungen 1) $a_n \le b_n \quad \forall n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ genügen.

Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a_n \le x \le b_n \ \forall n$.

Man hat weiter $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$.

(Definiert man die Intervallfolge $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, so sagen die Vor des Satzes 7: $(I_n)\downarrow$ in dem Sinn, dass $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ gilt. Die Längen $|I_n|$ von I_n sind eine Nullfolge. Es ist $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.)

Beispiele hierzu

1) a_n: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 2}{a_n + 2}$

b_n: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \dfrac{2b_n + 2}{b_n + 2}$ $\Big\}$ $x = \sqrt{2}$

2) (7. Übblatt)

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$: $x = e$.

3) Satz 8 (Leibniz Kriterium für alternierende Reihen)

(a_n) sei eine reelle Zahlenfolge mit folgenden Eigenschaften:

$a_n > 0$, $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n$, $a_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

Dann ist die Folge (S_m), $S_m := \sum\limits_{n=0}^{m} (-1)^n a_n$, konvergent.

Der Grenzwert sei S, $S =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. Es gelten:

a) $S_{2k+1} \le S \le S_{2k}$, $k = 0, 1, 2 \dots$

b) $|S - S_m| \le a_{m+1}$, $m = 0, 1, 2 \dots$