Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \dots$$

ist konvergent. Es gilt z.B.

$$S_3 = \frac{7}{12} \le \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} \le \frac{5}{6} = S_2$$

9.6 Die Zahl e

1) Durch (a_n), $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und (b_n), $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ wird eine Intervallschachtelung gegeben (Satz 7).

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e$. Es gilt

7.Ü H3e) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n.$$

2) Es gilt $$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{=:S_n}.$$

Mit dem Binomischen Satz zeigt man: $a_n \le S_n \quad \forall n$.

und $$e = \lim_{n\to\infty} a_n \ge S_m \quad \forall m$$

Insgesamt also:

$$e \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \le e \quad \checkmark$$

Fehlerabschätzung (8. Ü H2a)

$$0 < e - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$

$$< \frac{1}{n(n!)}.$$

9.7 Verschiedenes

1/ Satz 9 (Cauchy Kriterium)

Eine Folge (a_n) ist konvergent $\Longleftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine

$(*)$ $\begin{cases} \text{Zahl } N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ derart, dass} \\ |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N(\varepsilon) \\ \text{gilt.} \end{cases}$

Zum Bew von „$\Leftarrow$": 1) aus $(*)$ folgt, dass die Folge beschränkt ist.

2) mit Satz 1 (9.4) folgt, dass die Folge einen HP H besitzt.

3) mit 8.4 H1c) gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \to H$ $(k \to \infty)$.

4) mit $(*)$ folgt: $a_n \to H$ $(n \to \infty)$.

2/ Satz 10 Aus der Konvergenz von (s_n), $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, folgt: $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

3/ $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 .$$

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ existiert.

10.1 <u>Def:</u> (a_k) sei eine Zahlenfolge. Die Folge (s_n), $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, heißt <u>Reihe</u> und wird durch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Im Falle der Konvergenz der Folge (s_n) sagen wir: <u>die Reihe konvergiert</u>; und schreiben $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$. $\lim_{n\to\infty} s_n$ heißt auch Wert der Reihe.

<u>Beispiele</u> (kap 9): geometr. Reihe, Exponentialreihe, alternierende harm. Reihe

<u>Satz 1</u> (Cauchy Kriterium / Satz 9, kap 9)

<u>$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass aus $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq N(\varepsilon)$: $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$ folgt.</u>

($\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$ für jedes n, was wieder die Divergenz der harmonischen Reihe belegt)

<u>Satz 2</u>: <u>$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ seien konvergente Reihen.</u>

<u>Dann sind auch die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ konvergent, und es gelten $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda a$.</u>

<u>Bemerkungen:</u>

1) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so erhält man durch willkürliches <u>Klammersetzen</u> wieder eine konvergente Reihe und zwar eine mit demselben Wert.

2) In Reihen verändert <u>Klammern weglassen</u> oder <u>Klammern versetzen (Assoziativität)</u> i. a. das Konvergenzverhalten der Reihe.

3) Umordnung verändert i.a. das Konvergenzverhalten einer Reihe. Ist $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so ist $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Ist die Reihe konvergent aber nicht absolut konvergent (nächster Abschnitt 10.2), so gibt es zu jeder Zahl α eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (also eine Umordnung) mit $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)} = \alpha$.

Reihen, die unempfindlich sind gegenüber Umordnungen, sind die

---

10.2 Absolut konvergenten Reihen.

Def.: Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ konvergent ist.

Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

Satz 3: Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Satz 4: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ eine absolut konvergente Reihe, so konvergiert jede Umordnung der Reihe und zwar ebenfalls gegen a.

Satz 5 (Majorantenkriterium)
Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = c$ eine konvergente Reihe und (a_n) eine Zahlenfolge. Es gelte $|a_n| \le c_n \ \forall n$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe.

($\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ heißt Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$)

Satz 6 (Minorantenkriterium)

Für die reellen Folgen (c_n), (a_n) gelten $0 \le c_n \le a_n \ \forall n$.
Dann folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
("$\sum c_n$ ist divergente Minorante für $\sum a_n$")

10.3

Satz 7: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sei absolut konvergent, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und
$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$, $\quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, und es gilt
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$ heißt das Cauchy Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$.

Beispiel: Das Cauchy Produkt der konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ mit sich selbst ist die divergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}$

10.4 Satz 8 (Wurzelkriterium)

(a_k) sei eine Zahlenfolge, $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.
a) Falls $\rho < 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
b) Falls $\rho > 1$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.
c) Im Fall $\rho = 1$ ist hinsichtlich Konvergenz/Divergenz keine verbindliche Aussage möglich. (Für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ gilt $\rho = 1$)