Satz 9 (Quotientenkriterium)

(a_k) sei eine Folge mit $a_k \neq 0$ für fast alle k.
$r := \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $R := \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dann gelten

a) Aus $R < 1$ folgt, dass $\sum_1^\infty a_k$ absolut konvergent ist

b) Aus $r > 1$ folgt, dass $\sum_1^\infty a_k$ divergiert.

(Die Fälle $r \leq 1 \leq R$ sind nicht erfasst)

Folgerung: Ist (a_n) eine Folge wie in Satz 9. Konvergiert $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ gegen eine Zahl $q < 1$, so konvergiert (a_n) gegen Null.

Beispiele: 1. (Ü) $\sum_{k=1}^\infty a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

$r = 0$, $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = \infty$

2. $\sum_{k=1}^\infty a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \cdots$

$r = \frac{1}{8}$, $\rho = \frac{1}{2}$, $R = 2$

Zusammenfassung zu Satz 8/9 (Umformulierung)

1) Gilt mit einer festen Zahl q: $0 < q < 1$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für fast alle n, so ist $\sum_k^\infty a_k$ absolut konvergent.
Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, so ist $\sum_1 a_k$ divergent.

2) Gilt mit einer festen Zahl q: $0 < q < 1$: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n, so ist $\sum_k a_k$ absolut konvergent.
Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n folgt Divergenz der Reihe $\sum_k^\infty a_k$.

Kapitel 11 Die Exponentialfunktion

Satz 1: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots =: \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \text{ absolut konvergent.}$$

Def: Die hierdurch definierte Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{cases}$$ heißt Exponentialfunktion:

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Man liest vorher ab: $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ und $\exp(0) = 1$

Satz 2 (Funktionalgleichung für exp)

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w), \quad z, w \in \mathbb{C}$$

Folgerungen:
1) $\exp(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}$
2) $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z), \quad z \in \mathbb{C}$

Satz 3 (Die reelle Exponentialfunktion)

a) $\exp(x) > 0, \; x \in \mathbb{R}$, b) $\exp \uparrow$ (streng)

c) $\exp(n) = e^n, \; n \in \mathbb{Z}$, d) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n \to \infty} n^k \exp(-n) = 0$

12.1 Definition

Es sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$, $a \in I$ und $D = I \setminus \{a\}$.

$f: D \to \mathbb{R}$ sei gegebene Funktion.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \overset{\text{Def}}{\iff} \text{für jede Folge } (x_n),\ x_n \in D, \text{ mit } x_n \to a\ (n \to \infty) \text{ gilt } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

(Wir werden gelegentlich die folgenden Bezeichnungen verwenden:

$\lim_{x \to a+} f(x) = A$ $(x \to a-)$ $\iff$ es gilt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$ für jede Folge (x_n), $x_n \in D$, mit $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ und $x_n > a$ $(x_n < a)$

Wir sprechen vom rechtsseitigen (linksseitigen) Grenzwert)

Beispiele: 1) $\lim_{x \to 0} \exp(x) = 1$

2) $f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ existiert nicht. Es gelten aber:

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1-} f(x) = 0$.

3) $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei das Polynom

$$P(x) = x^k + \sum_{j=1}^{k} a_j x^{k-j} \qquad (k \geq 1).$$

Es gelten: $\lim_{x \to \infty} P(x) = \infty$ und $\lim_{x \to -\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & k \text{ gerade} \\ -\infty, & k \text{ ungerade} \end{cases}$

12.2 Def: Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall oder die Vereinigung von Intervallen. Es sei $a \in D$.

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in a (stetig in D), falls

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x \to a} x)$ (für jedes $a \in D$) gilt.

Beispiele: 1/ Die konstanten Funktionen und $id_{\mathbb{R}}$ sind überall stetig.

2/ $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt stetig.

Satz 1: $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien gegebene und in $a \in D$ stetige Funktionen. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f+g,\ fg,\ \lambda f : D \to \mathbb{R}$ in a stetig.
Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g} : \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ in a stetig.

Beispiele: 3/ Alle Polynome und alle rationalen Funktionen sind in ihrem Defbereich stetig.

4/ $abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $abs(x) = |x|$ ist in jedem Punkt stetig.

Satz 2 Es seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Es seien f in a und g in $b := f(a)$ stetig. Dann ist $g \circ f$ in a stetig.

Beispiele: 5) $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist
$|f| : D \to \mathbb{R},\ x \to |f(x)|$ stetig.

6/ Mit $q(x) = x^2$ sind $\exp \circ q$, $x \to \exp(x^2)$ und $q \circ \exp$, $x \to (\exp(x))^2$ stetig.

Satz 3 (ε-δ-Definition der Stetigkeit)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$. Es gilt:

f ist in a stetig $\Longleftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ (i.a. $\delta = \delta(\varepsilon, a)$) mit: es gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$.

Folgerung: Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in a und $f(a) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $f(x) \neq 0$ gilt für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$.

Beispiele: 1) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $a \in \mathbb{R}$ stetig.

Wähle zu $\varepsilon > 0$ etwa $\delta = \min\left(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\exp(a)}, 1\right)$

2) $\sqrt{}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist in $a > 0$ stetig.

Wähle zu $\varepsilon > 0$ etwa $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$.

12.3 Grundlegende Sätze zu Stetigkeit

Satz 4: $[a,b]$ sei ein beschränktes abgeschlossenes Intervall, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Es gelte $f(a)f(b) < 0$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Folgerung 1: (Zwischenwertsatz)

Es sei f wie in Satz 4. Für $c \in \mathbb{R}$ gelte $(f(a)-c)(f(b)-c) < 0$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = c$.

Beispiel: Es sei $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ und $P(x) = x^n - \alpha$. Aus $P(0) < 0$, $P(1+\alpha) > 1 > 0$ folgt, dass es ein $x_0 > 0$ mit $x_0^n = \alpha$ gibt. Man überlegt sich, dass x_0 durch die Eigenschaften $x_0 > 0$ und $x_0^n = \alpha$ eindeutig bestimmt ist. $x_0 := \sqrt[n]{\alpha}$.

Folgerung 2

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und $\uparrow$ (streng) ($\downarrow$ (streng)). Dann ist
$$f:[a,b] \to [f(a), f(b)] \quad ([f(b), f(a)]) \text{ bijektiv.}$$

Satz 5: Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\uparrow$ (streng) ($\downarrow$ (streng)). Die dann definierte Umkehrfunktion
$$f^{-1}: [f(a), f(b)] \ ([f(b), f(a)]) \to [a,b]$$
ist stetig und $\uparrow$ (streng) ($\downarrow$ (streng)).

Beispiel: $f(x) = x^k \quad (k \in \mathbb{N})$

1. **k gerade:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \geq 0\}$.

   f ist $\uparrow$ für $x \geq 0$ und $\downarrow$ für $x \leq 0$.

   Zu $f_1 := f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gibt es die Umkehrfunktion
   $$f_1^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f_1^{-1}(x) := \sqrt[k]{x}, \ \uparrow, \ \text{stetig}$$

   Zu $f_2 := f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ gibt es die Umkehrfunktion
   $$f_2^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-, \quad f_2^{-1}(x) = -\sqrt[k]{x}, \ \downarrow, \ \text{stetig}$$

2. **k ungerade:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \uparrow, \ \text{stetig}$

   $$\to \quad f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}, \ \uparrow, \ \text{stetig.}$$