Lösung zu Aufgabe T1 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ zeigen wir mit vollständiger Induktion:

$$\text{Für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ konvergiert } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \text{ absolut, mit dem Wert } \frac{1}{(1-z)^{k+1}}. \tag{35}$$

Induktionsanfang: Für $k = 0$ haben wir wegen $\binom{n+k}{n} = \binom{n}{n} = 1$ eine geometrische Reihe vor uns. Diese konvergiert bekanntlich absolut und hat den Wert $\frac{1}{1-z}$.
Induktionsschluss: Die Behauptung sei nun für ein gewisses k bereits gezeigt. Dann bilden wir das Cauchyprodukt der zwei Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,. \tag{36}$$

Nach Induktionsvoraussetzung konvergiert die erste Reihe absolut und da auch die geometrische Reihe absolut konvergiert, ist auch das Cauchyprodukt der Reihen absolut konvergent und hat als Wert das Produkt der beiden Reihenwerte:

$$\frac{1}{(1-z)^{k+2}} = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} z^m z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} \right) z^n\,. \tag{37}$$

Die Induktionsbehauptung ist also gezeigt, wenn wir noch $\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{n+k+1}{n}$ beweisen. Dazu verwenden wir vollständige Induktion nach n:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ steht links $\binom{k}{0} = 1$ und rechts $\binom{k+1}{0} = 1$.
Induktionsschluss: Ist die Gleichheit für n bewiesen, so folgt

$$\sum_{m=0}^{n+1} \binom{m+k}{m} = \sum_{m=0}^{n} \binom{m+k}{m} + \binom{n+1+k}{n+1} = \binom{n+k+1}{n} + \binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k+2}{n+1} = \binom{n+1+k+1}{n+1}\,. \tag{38}$$

Wir wissen nun insbesondere, dass für den Konvergenzradius r der Potenzreihe $r \geq 1$ gilt; zudem ist $\binom{n+k}{n} \geq 1$, also $\limsup \binom{n+k}{n}^{1/n} \geq 1$ und damit $r \leq 1$. Folglich gilt $r = 1$. Wegen $\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1} = n+1$ und $\binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ wissen wir nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n = \frac{2}{(1-z)^3}\,. \tag{39}$$

Daraus folgt dann wegen $n^2 = (n+2)(n+1) - 3(n+1) + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) z^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{40}$$

$$= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{2 - 3(1-z) + (1-z)^2}{(1-z)^3} = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3} \tag{41}$$

und wegen $2n + 1 = 2(n+1) - 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^{2n} &= -z^0+\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(z^2)^n = -1+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z^2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n \\ &= -1+\frac{2}{(1-z^2)^2}-\frac{1}{1-z^2}=\frac{-(1-z^2)^2+2-(1-z^2)}{(1-z^2)^2} \\ &= \frac{3z^2-z^4}{(1-z^2)^2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Lösung zu Aufgabe T2 Wir suchen Zahlen a_n mit

$$\frac{1}{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n, \quad \text{also} \quad 1=(x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n\,. \tag{43}$$

Nun gilt wegen $x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

$$(x^2+2x-3)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^{n+2}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n \tag{44}$$

$$=-4a_0-4a_1(x+1)+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}-4a_n)(x+1)^n\,. \tag{45}$$

Diese Potenzreihe soll den Wert 1 haben; wegen des Identitätssatzes für Potenzreihen liefert dies die Gleichungen

$$-4a_0=1, \quad -4a_1=0, \quad a_{n-2}-4a_n=0 \quad (n\geq 2)\,. \tag{46}$$

Es folgt: $a_0=-\frac{1}{4}$, $a_1=0$ und $a_n=\frac{1}{4}a_{n-2}$ für $n\geq 2$. Vollständige Induktion liefert: $a_{2k+1}=0$ und $a_{2k}=-(\frac{1}{4})^{k+1}$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$.
Wegen $\sqrt[2k]{|a_{2k}|}=(\frac{1}{4})^{(1+1/k)/2}\xrightarrow{k\to\infty}(\frac{1}{4})^{1/2}=\frac{1}{2}$ und $\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|}=0$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $r=(\limsup\sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1}=(\frac{1}{2})^{-1}=2$.
Bemerkung: Man kann die Aufgabe auch lösen, indem man $f(x)=((x+1)^2-4)^{-1}=-\frac{1}{4}(1-(\frac{x+1}{2})^2)^{-1}$ als geometrische Reihe entwickelt.

Lösung zu Aufgabe T3

a) Es gilt $a_n\leq 2^n$, wie man mit vollständiger Induktion sieht:

Induktionsanfang: Die Behauptung ist für $n=0$ und $n=1$ richtig.

Induktionsschluss: Ist die Behauptung für $n-1$ und n bewiesen (wobei $n\geq 1$), so folgt

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\leq 2^n+2^{n-1}\leq 2^n+2^n=2^{n+1}\,. \tag{47}$$

Folglich ergibt sich $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}\leq 2$ und damit gilt für den Konvergenzradius r der zu betrachtenden Potenzreihe $r=(\limsup\sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1}\geq\frac{1}{2}$.

b) Für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1\,. \end{aligned} \tag{48}$$

c) Aus **b)** wissen wir

$$(1 - x - x^2) f(x) = 1, \qquad \text{also} \qquad f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}\,. \tag{49}$$

Nun hat $x^2 + x - 1$ die Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 + 1} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}\,)$ und es gilt

$$\frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1} = \frac{x - x_1 - (x - x_2)}{(x - x_2)(x - x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{x^2 + x - 1} = \frac{-\sqrt{5}}{x^2 + x - 1} = \sqrt{5} \cdot f(x) \tag{50}$$

Mit diesen Zahlen x_1 und x_2 hat man also die behauptete Darstellung.

d) Allgemein gilt

$$\frac{1}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{1 - x/x_0} = -\frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x_0^{n+1}}\,. \tag{51}$$

Aus **c)** ergibt sich somit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x_1^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{x_2^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) x^n\,. \tag{52}$$

Wegen

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}\,)} = \frac{2(-1 - \sqrt{5}\,)}{1 - 5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \tag{53}$$

liefert dann der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^{n+1}} - \frac{1}{x_2^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right). \tag{54}$$

Lösung zu Aufgabe T4

a) Wir suchen eine Darstellung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nun ist

$$f(x) = \left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{(1+x+x^2)(1-x)}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{1-x^3}\right)^2 = (1-x)^2\,\frac{1}{(1-x^3)^2} \tag{55}$$

und gemäß Aufgabe 4 ergibt sich für $|x| < 1$

$$= (1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}\big((n+1)x^{3n} - 2(n+1)x^{3n+1} + (n+1)x^{3n+2}\big)\,. \tag{56}$$

Folglich gilt: $a_{3n} = a_{3n+2} = n+1$ und $a_{3n+1} = -2(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Der Konvergenzradius dieser Reihe ist offenbar 1.

b) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um den Punkt 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich

$$f(z) = \sin(\tfrac{\pi}{4} + z - \tfrac{\pi}{4}) = \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos(z - \tfrac{\pi}{4}) + \cos(\tfrac{\pi}{4})\sin(z - \tfrac{\pi}{4}) \tag{57}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(z - \tfrac{\pi}{4})^{2k} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z - \tfrac{\pi}{4})^{2k+1} \tag{58}$$

Für die Koeffizienten der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \frac{\pi}{4})^n$ gilt also:

$$a_{2k} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0\,. \tag{59}$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

c) Es gilt $1 - z - 2z^2 = (1+z)(1-2z)$. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}\,. \tag{60}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a(1-2z) + b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2}\,, \tag{61}$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a + b = 1$ und $-2a + b = -1$. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$. Somit gilt

$$f(z) = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3} \tag{62}$$

$$= \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n \tag{63}$$

für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ und $\frac{2}{3}|z-1| < 1$. Für die Koeffizienten in $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ ergibt sich also $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)$. Der Konvergenzradius ist $\frac{3}{2}$.

d) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$, also

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 4^k x^{2k}\,. \tag{64}$$

Für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt also $a_0 = 1$, $a_{2k-1} = 0$ und $a_{2k} = \frac{1}{2}(-1)^k 4^k/(2k)!$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Konvergenzradius ist offenbar ∞.