UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
22. Januar 2007

**Lösungen zum 11. Übungsblatt**

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Wichtige Potenzreihen:**

| Funktion | Potenreihenentwicklung | Konvergenzbereich ($x \in \mathbb{C}$) |
|---|---|---|
| | **geometrische Reihe** | |
| $\frac{1}{1-x}$ | $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\frac{1}{1+x}$ | $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| | **binomische Reihe** | |
| $(1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ | $1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ | $\lvert x\rvert < 1$<br>$x = \pm 1$ für $\alpha > 0$ |
| $(a+x)^\alpha, a \in \mathbb{R}^+$ | $= \sum_{k=0}^{\infty} a^{\alpha-k} \binom{\alpha}{k} x^k$ | $\lvert x\rvert < a$<br>$x = \pm 1$ für $\alpha > 0$ |
| | **Exponentialfunktion** | |
| $e^x$ | $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| $e^{bx}, b \in \mathbb{C}$ | $1 + bx + \frac{(bx)^2}{2!} + \frac{(bx)^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bx)^k}{k!}$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| | **Logarithmusfunktion** | |
| $\ln(1+x)$ | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ | $\lvert x\rvert < 1$ und $x = 1$ |

| | | |
|---|---|---|
| | **Trigonometrische Funktionen** | |
| $\sin(x)$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | $\|x\| < \infty$ |
| $\cos(x)$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ | $\|x\| < \infty$ |
| $\tan(x)$ | $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k(4^k-1) \frac{\|B_{2k}\| x^{2k-1}}{(2k)!}$<br>$B_m$ Bernoulli-Zahlen | $\|x\| < \frac{\pi}{2}$ |
| | **Inverse trigonometrische Funktionen** | |
| $\arctan(x)$ | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ | $\|x\| < 1$ und $x = \pm 1$ |
| arccot(x) | $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \text{arccot(x)}$ | |
| $\arcsin(x)$ | $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{15x^7}{336} + \ldots =$<br>$x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1) x^{2k+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot \cdot 2k \cdot (2k+1)}$ | $\|x\| < 1$ |
| $\arccos(x)$ | $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = \arccos(x)$ | |
| | **Hyperbelfunktionen** | |
| $\sinh(x)$ | $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | $\|x\| < \infty$ |
| $\cosh(x)$ | $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ | $\|x\| < \infty$ |
| $\tanh(x)$ | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k(4^k-1) \frac{B_{2k} x^{2k-1}}{(2k)!}$<br>$B_m$ Bernoulli-Zahlen | $\|x\| < \frac{\pi}{2}$ |
| | **Inverse Hyperbelfunktionen** | |
| artanh(x) | $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ | $\|x\| < 1$ |
| arsinh(x) | $x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{15x^7}{336} + \ldots =$<br>$x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)(-1)^k x^{2k+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot \cdot 2k \cdot (2k+1)}$ | $\|x\| < 1$ |

**Lösung zu Aufgabe H1**

(a) Wir suchen Zahlen $a_n$ mit

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{also} \qquad \sinh x = \cosh x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,. \tag{1}$$

Setzen wir die Potenzreihendarstellungen von $\sinh x$ und $\cosh x$ ein, so bedeutet dies

$$x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \big(1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \cdots\big)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\big)\,. \tag{2}$$

Wir multiplizieren auf der rechten Seite aus; dann haben wir die Gleichung

$$x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = a_0 + a_1 x + (a_2 + \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 + \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots\,. \tag{3}$$

Somit liefert der Identitätssatz für Potenzreihen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 + \tfrac{1}{2!}a_0 = 0, \quad a_3 + \tfrac{1}{2!}a_1 = \tfrac{1}{3!}\,, \tag{4}$$

also $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_3 = -\frac{1}{3}$.

(b) Wir müssen die Gleichung $e^x = (\cos x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)$, also

$$1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots = \big(1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + - \cdots\big)\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\big) \tag{5}$$

betrachten. Die rechte Seite ergibt

$$a_0 + a_1 x + (a_2 - \tfrac{1}{2!}a_0)x^2 + (a_3 - \tfrac{1}{2!}a_1)x^3 + \cdots \tag{6}$$

und der Vergleich mit der linken Seite liefert $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 - \frac{1}{2!}a_0 = \frac{1}{2!}$ sowie $a_3 - \frac{1}{2!}a_1 = \frac{1}{3!}$, also $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{2}{3}$.

**Lösung zu Aufgabe H2**

(a) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n \,. \tag{7}$$

Die erste Reihe ergibt $e^z - 1$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 0 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{2(e^z - 1 - z)}{z} \,. \tag{8}$$

Insgesamt folgt: Die Potenzreihe stellt eine Funktion $f$ dar, die gegeben ist durch

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(z) = e^z - 1 - \frac{2(e^z - 1 - z)}{z} = \frac{(z-2)e^z + z + 2}{z} \quad (z \neq 0)\,. \tag{9}$$

(b) Hier ergibt sich wegen der Potenzreihenentwicklung der Sinus-Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+i)^{2n+2} = (z+i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+i)^{2n+1} = (z+i)\sin(z+i)\,. \tag{10}$$

**Lösung zu Aufgabe H3**

(a) Wir verwenden die Potenzreihen der vorkommenden Funktionen.

$$\frac{\sinh x - \sin x}{x(\cosh x - 1)} = \frac{(x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) - (x - \frac{1}{3!}x^3 + - \cdots)}{x((1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots) - 1)} = \frac{\frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{\frac{1}{2!}x^3 + \ldots} \xrightarrow{x\to 0} \frac{2 \cdot 2!}{3!} = \frac{2}{3}\,. \tag{11}$$

(Beim Grenzübergang kürzt man mit $x^3$ und verwendet die Stetigkeit von Potenzreihen.)

(b) Auch hier kommen wieder Potenzreihen zum Einsatz:

$$\begin{aligned}\frac{a^{x^2} - \cos x}{\tan x^2} &= \frac{(\cos x^2)(e^{x^2 \ln a} - \cos x)}{\sin x^2} \\ &= \frac{(\cos x^2)\big((1 + (x^2 \ln a) + \frac{1}{2!}(x^2 \ln a)^2 + \cdots) - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + - \cdots)\big)}{x^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + - \cdots} \\ &= \frac{(\cos x^2)(x^2(\ln a + \frac{1}{2}) + \cdots)}{x^2 - \frac{1}{3!}(x^2)^3 + - \cdots} \xrightarrow{x\to 0} \ln a + \tfrac{1}{2}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

**Lösung zu Aufgabe H4**

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cosh z + \sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{2e^z}{2} = e^z\,. \tag{13}$$

Also ergibt sich $(\cosh z + \sinh z)^n = (e^z)^n = e^{nz} = \cosh(nz) + \sinh(nz)$.

(b)+(c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx) + i\sin(kx)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\cos x + i \sin x)^k}{k!} \\ &= e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} e^{i \sin x} = e^{\cos x}\big(\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)\big)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Vergleicht man nun Real- und Imaginärteil, so folgt die Behauptung.