Lösung zu Aufgabe T1

(a) Wir erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((z-3)^2)^{2n}}{(2n)!} = \cosh((z-3)^2). \tag{15}$$

.

(b) Hier müssen wir wieder etwas länger umformen:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2^{2n+1}(2n+1)!} z^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\frac{1}{2}}{(2n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)-\frac{1}{2}}{(2n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\end{aligned} \tag{16}$$

Die erste Reihe ergibt $\cosh(\frac{1}{2}z) - 1$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 0 und sonst

$$\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} = z^{-1}\big(\sinh(\tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{2}z\big) = z^{-1}\sinh(\tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{2}\,. \tag{17}$$

Die Potenzreihe stellt also eine Funktion f dar, die gegeben ist durch

$$f(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f(z) = \cosh(\tfrac{1}{2}z) - z^{-1}\sinh(\tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{2} \quad (z \neq 0)\,. \tag{18}$$

Lösung zu Aufgabe T2

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(e^x - 1)/x \xrightarrow{x \to 0} 1$ gilt. Folglich ergibt sich

$$\lim_{y \to 1} \frac{\ln y}{y-1} = \lim_{y \to 1} \frac{\ln y}{e^{\ln y} - 1} = 1\,, \quad \text{denn} \quad \ln y \xrightarrow{y \to 1} 0 \tag{19}$$

Wir setzen nun $f(x) := \frac{2x+3}{2x+1}$. Dann gilt $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 1$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty} \big(\ln(f(x))^{x+1}\big) &= \lim_{x \to \infty} \big((x+1)\ln f(x)\big) = \lim_{x \to \infty} \left((x+1)(f(x)-1)\frac{\ln f(x)}{f(x)-1}\right) \\ &= \lim_{x \to \infty} (x+1)(f(x)-1) \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)-1} = \lim_{x \to \infty} (x+1)(f(x)-1)\end{aligned} \tag{20}$$

$$= \lim_{x \to \infty} (x+1)\frac{2}{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x+2}{2x+1} = 1\,. \tag{21}$$

Für den zu untersuchenden Grenzwert ergibt sich also wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x \to \infty} (f(x))^{x+1} = \lim_{x \to \infty} e^{\ln(f(x))^{x+1}} = \exp\big(\lim_{x \to \infty} \ln(f(x))^{x+1}\big) = e^1 = e\,. \tag{22}$$

(b) Wieder untersuchen wir zunächst den Logarithmus:

$$\ln\big((\tan x)^{\tan(2x)}\big) = \tan(2x)\ln(\tan x) = \tan(2x)(\tan x - 1)\frac{\ln(\tan x)}{\tan x - 1} \tag{23}$$

Genau wie eben folgt dann wegen $\tan x \xrightarrow{x\to\pi/4} 1$

$$\lim_{x\to\pi/4}\ln\big((\tan x)^{\tan(2x)}\big) = \lim_{x\to\pi/4}\tan(2x)(\tan x - 1)\,. \tag{24}$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme ergibt sich

$$\begin{aligned}\tan(2x)(\tan x - 1) &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\cdot\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2 x - \sin^2 x}\cdot\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}\\ &= -\frac{2\sin x}{\cos x + \sin x} \xrightarrow{x\to\pi/4} -\frac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1\,.\end{aligned} \tag{25}$$

Der zu berechnende Grenzwert ist somit e^{-1}.

Lösung zu Aufgabe T3

(a) Für $w, z \in \mathbb{C}$ setzen wir $a := \frac{1}{2}(w+z)$ und $b := \frac{1}{2}(w-z)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\cos w &= \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \cos z &= \cos(a-b) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b)\\ &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\end{aligned} \tag{26}$$

Somit ergibt sich

$$\cos w - \cos z = -2\sin(a)\sin(b)\,, \tag{27}$$

und das ist die Behauptung.

(b) Mit der geometrischen Summenformel erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kz) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikz}+e^{-ikz}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{iz}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{iz})^k + e^{-iz}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-iz})^k\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{iz}\frac{1-(e^{iz})^n}{1-e^{iz}} + e^{-iz}\frac{1-(e^{-iz})^n}{1-e^{-iz}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{iz}\frac{e^{-iz/2}-e^{iz(n-1/2)}}{e^{-iz/2}-e^{iz/2}} + e^{-iz}\frac{e^{iz/2}-e^{-iz(n-1/2)}}{e^{iz/2}-e^{-iz/2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{iz/2}-e^{-iz/2}-e^{iz/2}+e^{iz(n+1/2)}+e^{-iz/2}-e^{-iz(n+1/2)}}{e^{iz/2}-e^{-iz/2}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{iz(n+1/2)}-e^{-iz(n+1/2)}}{e^{iz/2}-e^{-iz/2}}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{iz(n+1/2)}-e^{-iz(n+1/2)}}{2i}\cdot\frac{2i}{e^{iz/2}-e^{-iz/2}}\\ &= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2\sin(z/2)}\end{aligned} \tag{28}$$

Lösung zu Aufgabe T4

(a) Äquivalent zu der gegebenen Gleichung ist

$$\ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln(\sqrt{x}\,)^x, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x}, \qquad \text{d. h.} \qquad \sqrt{x}\ln x = \tfrac{1}{2}x\ln x\,. \tag{29}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$), oder wenn $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$. Letzteres bedeutet $x = \frac{1}{4}x^2$ und damit $x(1-\frac{1}{4}x) = 0$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Es gibt somit genau zwei Lösungen: $x = 1$ oder $x = 4$.

(b) Wir zeigen die Behauptung mittels vollständiger Induktion. Für $a = 1$ ist die Abschätzung trivial, der Induktionsanfang ist also gemacht. Nun sei die Behauptung für ein gewisses $a \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann folgt wegen des Additionstheorems

$$\begin{aligned}|\sin((a+1)x)| &= |\sin(ax)\cos(x) + \cos(ax)\sin(x)| \le |\sin(ax)|\cdot|\cos x| + |\cos(ax)|\cdot|\sin x| \\ &\le |\sin(ax)| + |\sin x| \le a|\sin x| + |\sin x| = (a+1)|\sin x|\,.\end{aligned} \tag{30}$$

Für beliebiges $a > 0$ gilt die Behauptung jedoch nicht. So wird etwa die Abschätzung

$$|\sin(\tfrac{1}{2}x)| \le \tfrac{1}{2}|\sin x| \tag{31}$$

für $x = \pi$ falsch, denn dann ergibt sich links 1, rechts jedoch 0.

(c) Zunächst sei a rational, also $a = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Dann hat die Funktion f die Periode $2n\pi$, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(t + 2n\pi) + \sin(a(t + 2n\pi)) = \sin(t) + \sin(at + 2m\pi) = \sin(t) + \sin(at)\,. \tag{32}$$

Umgekehrt sei nun f periodisch, d. h. mit einem gewissen $T > 0$ gelte $f(t) = f(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet $\sin(t) + \sin(at) = \sin(t+T) + \sin(at + aT)$, also

$$\sin(t) - \sin(t+T) = \sin(at + aT) - \sin(at)\,. \tag{33}$$

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich wie folgt umformen:

$$\sin(t) - \sin(t+T) = \mathrm{Im}(e^{it} - e^{i(t+T)}) = \mathrm{Im}(e^{it}(1 - e^{iT}))\,, \tag{34}$$

und da sich $1 - e^{iT}$ in der Form $re^{i\varphi}$ (mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$) schreiben lässt,

$$= r\,\mathrm{Im}(e^{i(t+\varphi)}) = r\sin(t+\varphi)\,. \tag{35}$$

Entsprechendes gilt für die linke Seite: Schreiben wir $e^{iaT} - 1 = \rho e^{i\psi}$, so haben wir

$$r\sin(t+\varphi) = \rho\sin(at+\psi)\,. \tag{$*$}$$

Fall 1: $r = 0$. Dann muss auch $\rho = 0$ gelten und nach Wahl von r und ρ bedeutet dies $e^{iT} = 1$ und $e^{iaT} = 1$. Daraus folgt $T = 2m\pi$ und $aT = 2n\pi$ mit gewissen $m, n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten $a = aT/T = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.

Fall 2: $r \neq 0$. Die linke Seite von ($*$) hat in $t = -\varphi$ eine Nullstelle. Da sie gleich der rechten Seite ist, welche offenbar $\frac{2\pi}{a}$-periodisch ist, hat die linke Seite also auch in $t = -\varphi + \frac{2\pi}{a}$ eine Nullstelle:

$$0 = r\sin(-\varphi + \tfrac{2\pi}{a} + \varphi) = r\sin(\tfrac{2\pi}{a})\,. \tag{36}$$

Wegen $r \neq 0$ folgt $\frac{2\pi}{a} = n\pi$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ und damit $a = \frac{2}{n} \in \mathbb{Q}$.