UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
2. Februar 2007

Lösungen zum 13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1 Oberfläche A und Volumen V einer zylindrischen Konservendose mit Radius r und Höhe h berechnen sich wir folgt:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \text{und} \quad V = \pi r^2 h\,. \tag{1}$$

Bei vorgegebenem Volumen V gilt somit $h = V/(\pi r^2)$ und für die Oberfläche ergibt sich $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2V/r$.
Die Oberfläche soll möglichst klein werden. Wegen $A(r) \to \infty$ für $r \to 0$ und für $r \to \infty$ folgt aus der Stetigkeit von $A(r)$, dass A auf $(0,\infty)$ ein Minimum hat. (Genaue Begründung: Es gibt ε und M mit $\varepsilon < 1 < M$ und $A(r) > A(1)$ für $r < \varepsilon$ und für $r > M$. Das Minimum, das A als stetige Funktion auf $[\varepsilon, M]$ besitzt, ist also auch das Minimum auf $(0,\infty)$.) Dort muss die Ableitung verschwinden:

$$A'(r) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} \quad \leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,. \tag{2}$$

Für die Höhe ergibt sich dann

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi(\frac{V}{2\pi})^{2/3}} = \frac{V^{1/3} \cdot 2^{2/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r\,. \tag{3}$$

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruchs streben für $x \to 0$ gegen 0. Zudem ist für $0 < |x| < \pi$ die Ableitung des Nenners ($\sin x$) ungleich 0. Daher liefert die Regel von de l'Hospital: Wenn

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \tag{4}$$

existiert, so existiert auch der ursprünglich zu untersuchende Grenzwert und die beiden sind gleich. Hier haben wir erneut die Form „$\frac{0}{0}$“ und die Ableitung des Nenners ist $\neq 0$ in einer Umgebung von 0. Also erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2\,. \tag{5}$$

(b) Auch hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$" und die Ableitung des Nenners ist für hinreichend große x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(falls die Grenzwerte existieren)}, \tag{6}$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,. \tag{7}$$

(c) Auch hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$"; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 0 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(x\ln x)' = x^x(1+\ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2\,. \tag{8}$$

(d) Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + x^2\sin(1/x)\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x} \tag{9}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0\,. \tag{10}$$

(e) Sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ streben für $x\to\infty$ gegen ∞. Als Ableitungen erhalten wir $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}(2\cos^2 x + x\cos x + \sin x\cos^2 x) \\ &= e^{\sin x}\cos x(2\cos x + x + \sin x\cos x)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Also wird $g'(x)$ auch für beliebig große x durch den Faktor $\cos x$ immer wieder 0. Daher ist die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar.

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{e^{\sin x}} \tag{12}$$

existiert nicht (Betrachte $x_n := (n+\frac{1}{2})\pi$), obwohl für jene x, für die $g'(x) \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{e^{\sin x}(2\cos x + x + \sin x\cos x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \tag{13}$$

Lösung zu Aufgabe H3 Offenbar gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$. Die stetige Funktion f muss daher ein Minimum haben. Wir finden es durch Nullsetzen der Ableitung:

$$f'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 0 \quad \leftrightarrow \quad nx - \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \tag{14}$$

Also ergibt sich $a = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$; das angegebene Messergebnis ist das arithmetische Mittel aller Messwerte. (Beachte: Das Minimierungsproblem ist eindeutig lösbar.)
Betrachten wir nun noch die Funktion g. O.B.d.A. gelte $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$. Probiert man ein paar Beispiele aus, kommt man zu folgender Vermutung:
Ist n gerade, so gilt $g(a) = \min\{\, g(x) : x \in \mathbb{R} \,\}$ genau dann, wenn $a \in [a_{n/2}, a_{1+n/2}]$.
(Hier ist das Minimierungsproblem also nicht eindeutig lösbar.)
Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: $n = 2$. Für $x \in [a_1, a_2]$ ist $g(x) = x - a_1 - (x - a_2) = a_2 - a_1$, für $x < a_1$ gilt $g(x) = -(x - a_1) - (x - a_2) = a_1 + a_2 - 2x > a_1 + a_2 - 2a_1 = a_2 - a_1$, und $g(x) > a_2 - a_1$ für $x > a_2$ sieht man ebenso ein.
Induktionsschluss: Für ein gewisses gerades n sei die Behauptung gezeigt. Dann gilt

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n+2} |x - a_k| = G(x) + H(x), \qquad \text{wobei} \qquad G(x) := \sum_{k=2}^{n+1} |x - a_k|,$$
$$H(x) := |x - a_1| + |x - a_{n+1}| \tag{15}$$

Nach Induktionsvoraussetzung wird G genau auf $[a_{1+n/2}, a_{2+n/2}]$ minimal und laut Induktionsanfang ist H auf $[a_1, a_{n+2}]$ konstant, ansonsten größer. Damit folgt die Behauptung auch für $n + 2$.
Völlig analog zeigt man die Aussage für ungerades n:
Ist n ungerade, so gilt $g(a) = \min\{\, g(x) : x \in \mathbb{R} \,\}$ genau dann, wenn $a = a_{(n+1)/2}$.

Lösung zu Aufgabe H4

(a) Wir nehmen an, es gelte $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Potenzreihe dürfen wir gliedweise differenzieren, es gilt also

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \,.$$

Dies soll für alle $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen mit

$$-\omega^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega^2 a_n x^n \,.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen ist die Gleichung $y'' = -\omega^2 y$ also genau dann erfüllt, wenn

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = -\omega^2 a_n \quad \text{für alle } n \ge 0 \tag{$*$}$$

gilt. Die Forderungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$ bedeuten $a_0 = y_0$ und $a_1 = 0$. Induktiv folgt dann aus $(*)$

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad a_{2n} = y_0 \omega^{2n} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Potenzreihe stellt die Funktion $y(x) = y_0 \cos(\omega x)$ dar.

(b) Wir bestimmen alle $\lambda \in \mathbb{C}$ für die die Gleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{16}$$

erfüllt ist.

Bemerkung: Man nennt die Gleichung (16) eine **homogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung**.

Wir erhalten aus dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ die Ableitungen $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Dies in Gleichung (16) eingesetzt liefert

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0. \tag{17}$$

Bemerkung: Diese Gleichung heißt in der Theorie linearer Differentialgleichung **charakteristische Gleichung**.

Diese Gleichung hat die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

Damit erfüllen die Funktionen $y_1(x) = e^{i\omega x}$ und $y_2(x) = e^{-i\omega x}$ die Differentialgleichung (16) und somit auch die Linearkombination

$$y(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{i\omega x}. \tag{18}$$

Nun waren in der Aufgabenstellung die Anfangswerte $y(0) = y_0$ und $y'(0) = 0$ gegeben. Setzen wir diese Bedingungen (18) und in die Ableitung dieser Gleichung nämlich

$$y'(x) = i\omega(C_1 e^{i\omega x} - C_2 e^{i\omega x}) \tag{19}$$

ein so erhalten wir

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= y_0 && (20)\\ C_1 - C_2 &= 0. && (21) \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $C_1 = C_2 = \frac{y_0}{2}$. Damit erhalten wir als Lösung

$$y(x) = \frac{y_0}{2}\left(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}\right) = y_0 \cos(\omega x). \tag{22}$$

(c) Der Lösungsansatz aus Teil (b) ist leichter zu berechnen, da man um die vollständige Induktion herum kommt.

Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine Gleichung der Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \tag{23}$$

mit $a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n-1$ heißt **Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.

Sind zusätzlich noch Anfangswerte

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{24}$$

gegeben so spricht man von einem **Anfangswertproblem**.

- Die höchste auftretende Ableitung in der Gleichung bestimmt die Ordnung.
- Alle Ableitungen kommen nur in der Potenz 1 vor und sind nur durch + oder - Zeichen mit den anderen Ableitungen verbunden, deshalb spricht man von einer linearen Gleichung.
- Ist $f(x) \neq 0$,so heißt die Gleichung **inhomogen**.
- $f(x)$ wir dann auch **Störfunktion** genannt.
- Ist $f(x) = 0$ heißt die Gleichung **homogen**.

Die Lösung einer solchen Differentialgleichung vollzieht sich in drei Schritten:

(1) Bestimmung der allgemeinen Lösung $y_h(x)$ der homogenen Differentialgleichung.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \tag{25}$$

(2) Bestimmung einer Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \tag{26}$$

(3) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann die Summe der homogenen und inhomongen Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) \tag{27}$$

zu (1): Wir betrachten die homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^n(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \tag{28}$$

Mittels des Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$ (Eulerscher Ansatz) erhalten wir die Gleichung

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{29}$$

Diese Gleichung nennt man **charakteristisches Polynom** der Differentialgleichung und stellt ein Polynom $n-$ten Grades dar. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat diese Polynomgleichung insgesamt n Lösungen. Dabei kann das Polynom einfache reelle und,oder konjugiert komplexe Nullstellen sowie mehrfache reelle und,oder konjugiert komplexe Nullstellen besitzen. Wir müssen jetzt folgende Fälle unterscheiden:

- $P(\lambda)$ habe eine einfache Nullstelle $\lambda = \lambda_j$. Dann erfüllt die Funktion $y_j(x) = e^{\lambda_j x}$ die homogene Differentialgleichung .
- $P(\lambda)$ habe eine $\nu-$fache Nullstelle $\lambda = \lambda_j$. Dann erfüllen die Funktionen $y_{j,k}(x) = x^k e^{\lambda_j x},\ k = 0, \dots \nu - 1$ die homogene Differentialgleichung .
- $P(\lambda)$ habe ein Paar konjugiert komplexer einfacher Nullstellen $\lambda = \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$. Dann erfüllen die Funktionen $y_j(x) = e^{(\alpha_j + i\beta_j)x},\ \bar{y}_j(x) = e^{(\alpha_j + i\beta_j)x}$, bzw. $r(x) = e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x),\ i(x) = e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x)$ die homogene Differentialgleichung.

- $P(\lambda)$ habe ein Paar konjugiert komplexer $\mu-$facher Nullstellen $\lambda = \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$. Dann erfüllen die Funktionen $y_{j,k}(x) = x^k e^{(\alpha_j + i\beta_j)x},\ \bar{y}_j(x) = x^k e^{(\alpha_j + i\beta_j)x},\ k = 0, \dots, \mu_1$ bzw. $r_k(x) = x^k e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x),\ i_k(x) = x^k e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x), k = 0, \dots, \mu_1$ die homogene Differentialgleichung.

Wir nehmen jetzt an, daß das charakterische Polyonm habe m reelle Nullstellen (einfach und mehrfach) sowie $s =$ konjugiert komplexe Nullstellen (einfach und mehrfach). (Bemerkung: Der Grad des charakteristischen Polynoms ist n=m+2s.) Dann lässt sich die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung in der Form

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} P_j(x) e^{\lambda_j x} + \sum_{j=m+1}^{m+s} R_j^*(x) e^{(\alpha_j + i\beta_j)x} + \sum_{j=m+1}^{m+s} I_j^*(x) e^{(\alpha_j - i\beta_j)x} \tag{30}$$

bzw.

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} P_j(x) e^{\lambda_j x} + \sum_{j=m+1}^{m+s} R_j(x) e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x) + \sum_{j=m+1}^{m+s} I_j(x) e^{(\alpha_j x} \sin(\beta_j x). \tag{31}$$

Dabei sind die Funktionen $P_j(x), R_j^*(x), R_j(x), I_j^*(x), I_j(x)$ Polynome in x vom Grade $n_j - 1$ (n_j Vielfachheit der Nullstelle λ_j bzw.des konjugiert komplexen Nullstellenpaares $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ des charakteristischen Polynoms). Die Koeffizienten der Polynome $P_j(x), R_j^*(x), R_j(x), I_j^*(x), I_j(x)$ sind reell aber noch unbestimmte Koeffizienten.

Beispiel: Homogene Differentialgleichung 2.Ordnung

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0,\ a, b \in \mathbb{R} \tag{32}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b. \tag{33}$$

Die Nullstellen berechnen sich mit $\Delta := a^2 - 4b$ zu

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}, & \text{falls } \Delta > 0 \\ \dfrac{-a}{2}, & \text{falls } \Delta = 0 \\ \dfrac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} & \text{falls } \Delta < 0. \end{cases} \tag{34}$$

Wir müssen jetzt diese drei Fälle diskutieren:

- $\Delta > 0$: Es liegen zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1, λ_2 vor.

  In diesem Falle erfüllen die Funktionen $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$ auf ganz $\mathbb{R}$ die Differentialgleichung und folglich ist

  $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{35}$$

  auch eine Lösung.
- $\Delta = 0$: Es liegt eine reelle doppelte Nullstelle $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ vor.

  In diesem Falle erfüllen die Funktionen $e^{\lambda_1 x}$ und $xe^{\lambda_2 x}$ auf ganz $\mathbb{R}$ die Differentialgleichung und folglich ist

  $$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \tag{36}$$

  auch eine Lösung.
- $\Delta < 0$: Es liegen zwei verschiedene konjugiert komplexe Nullstellen $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \bar{\lambda}$ vor.

  In diesem Falle erfüllen die Funktionen $y_1(x) = e^{\lambda x}$ und $y_2(x) = e^{\bar{\lambda} x}$ die Differentialgleichung und folglich ist

  $$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\bar{\lambda} x} \tag{37}$$

  auch eine Lösung. Dies ist eine komplexewertige Lösung der Differentialgleichung. Man kann jetzt zeigen, daß dann auch der Real- und Imaginarteil dieser Lösung die Differentialgleichung erfüllen. Mit $\lambda = \alpha + i\beta,\ \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ erhält man

  $$\operatorname{Re} y_{1,2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \tag{38}$$
  $$\operatorname{Im} y_{1,2} = \pm e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{39}$$

  und man erhält daraus dann die folgende reelle Lösung der Differentialgleichung

  $$y(x) = K_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + K_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{40}$$

  mit $K_1 = C_1 + C_2,\ K_2 = C_1 - C_2$ reelle Zahlen.

zu (2): Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^n(x) + a_{n-1} y^{n-1}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \tag{41}$$

gibt es grundsätzlich zwei Ansätze:

– Hat die Störfunktion $f(x)$ eine bestimmte Form, so kann man versuchen mit Hilfe eines speziellen Lösunganansatzes eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu gewinnen.

Nachfolgende Tabelle gibt einige solche Fälle an:

Störfunktion	Lösungsansatz p:=charakteristisches Polynom
$b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m$	$a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m$, falls $p(0) \neq 0$ $(a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m)x^\nu$, falls 0 ν-fache Nullstelle von p
$(b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m)e^{\alpha x}$	$(a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m)e^{\alpha x}$, falls $p(\alpha) \neq 0$ $(a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m)x^\nu e^{\alpha x}$, falls α ν-fache Nullstelle von p
$(b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m)\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases}$	$(a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m)\cos\beta x +$ $(\bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \ldots \bar{a}_mx^m)\sin\beta x$, falls $p(i\beta) \neq 0$ $(a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m)x^\nu \cos^{\beta x} +$ $(\bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \ldots \bar{a}_mx^m)x^\nu \sin^{\beta x}$, falls $i\beta$ ν-fache Nullstelle von p
$(b_0 + b_1x + \ldots b_mx^m)e^{\alpha x}\begin{cases}\cos(\beta x)\\ \sin(\beta x)\end{cases}$	$[(a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m)\cos\beta x +$ $(\bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \ldots \bar{a}_mx^m)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, falls $p(\alpha + i\beta) \neq 0$ $[(a_0 + a_1x + \ldots a_mx^m)x^\nu \cos^{\beta x} +$ $(\bar{a}_0 + \bar{a}_1x + \ldots \bar{a}_mx^m)x^\nu \sin^{\beta x}]e^{\alpha t}$, falls $\alpha + i\beta$ ν-fache Nullstelle von p

– Methode der **Variation der Konstanten**

Bei der Methode der Variation der Konstanten (kurz VdK) konstruiert man sich eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Die Lösung der homogenen Gleichung aus den Gleichungen (30) und (31) kann man in der Form

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots C_n y_n(x) \tag{42}$$

darstellen, wobei die Funktionen $y_i,\ i = 1, \ldots n$ gewisse Funktionen der Form $x^m e^{rx}, x^m e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^m e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sind. Die Menge $(y_1, \ldots, y_n)$ wird **Integralbasis** der homogenen Differentialgleichung genannt.

Um jetzt eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu gewinnen, nimmt man an, daß diese Lösung $y(x)$ sich aus dem folgenden Ansatz gewinnen lässt:

$$y(x) := C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x). \tag{43}$$

Dabei sind die $(y_1, \ldots, y_n)$ die Integralbasis der homogenen Gleichung und die $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ geeignete Funktionen. Diesen Ansatz (43) setzen wir in die inhomogene Differentialgleichung (23) ein. Nach einiger Rechnung erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n & = & 0 \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' & = & 0 \\ & \vdots & \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots C_n' y_n^{(n-2)} & = & 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots C_n' y_n^{(n-1)} & = & f \end{array} \tag{44}$$

Man kann zeigen, daß sich dieses System für die unbekannten Funktionen $C_j'(x),\ j = 1, \ldots, n$ eindeutig lösen lässt. Man erhält dann die gesuchten Funktionen $C_j(x),\ j = 1, \ldots, n$ durch Integration der zugehörigen $C_j'(x),\ j = 1, \ldots, n$, also

$$C_j(x) = \int C_j'(x) dx,\ j = 1, \ldots, n. \tag{45}$$

Damit ist

$$y_i(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x) \tag{46}$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

zu (3) Mit den Punkten (1) und (2) haben wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (23) bestimmt. Diese Lösung hängt noch von den Konstanten $C_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots n$, die in der Lösung der homogenen Gleichung auftreten ab. Sind zusätzlich Anfangswerte wie in (24) gegeben so kann man daraus diese Konstanten bestimmen, in dem man die Lösung $y(x)$ und ihre Ableitungen $y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ betrachtet und die Anfangsbedingungen einsetzt. Dies ergibt ein Gleichungssystem für die Konstanten $C_j,\ j = 1, \ldots, n$, das man lösen muß um eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems zu erhalten.

Beispiel:

Wir betrachten die allgemeine lineare Differentialgleichung 1.Ordnung

$$\begin{aligned} y' &= ay + f \qquad (47)\\ y(x_0) &= y_0 \qquad (48)\end{aligned}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ beliebig und O.B.d.A. sei f eine auf $[x_0, \infty]$ stetige Funktion. Die homogene Lösung berechnet sich mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ zu

$$y_h(x) = Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R}. \qquad (49)$$

Die inhomogene Lösung berechnen wir jetzt mit Hilfe der **Variation der Konstanten:** Wir machen den Ansatz

$$y_i(x) = C(x)e^{ax} \qquad (50)$$

und erhalten für die Ableitung

$$y_i'(x) = C'(x)e^{ax} + aC(x)e^{ax}. \qquad (51)$$

Diese beiden letzten Gleichungen setzten wir in in unsere Gleichung $y' = ay + f$ ein und erhalten

$$C'(x) = e^{-ax}f(x) \qquad (52)$$

bzw.

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-a\xi}f(\xi)d\xi. \qquad (53)$$

Damit erhalten wir für die inhomogene Gleichung die Lösung

$$y_i(x) = \left(\int_{x_0}^{x} e^{-a\xi}f(\xi)d\xi\right)e^{ax} = \int_{x_0}^{x} e^{a(x-\xi)}f(\xi)d\xi. \qquad (54)$$

Die allgemeine Lösung $y(x) = y_h(x) + y_i(x)$ ist dann

$$y(x) = Ce^{ax} + \int_{x_0}^{x} e^{a(x-\xi)}f(\xi)d\xi. \qquad (55)$$

Setzen wir noch die Anfangswerte $y(x_0) = y_0$ ein so halten wir mit $C = y_0e^{-ax_0}$ die eindeutige Lösung

$$y(x) = y_0e^{-ax_0}e^{ax} + \int_{x_0}^{x} e^{a(x-\xi)}f(\xi)d\xi. \qquad (56)$$

Ist insbesondere $x_0 = 0$ so ergibt sich daraus

$$y(x) = y_0e^{ax} + \int_{0}^{x} e^{a(x-\xi)}f(\xi)d\xi. \qquad (57)$$