Lösung zu Aufgabe T1 Mit Potenzreihen kommt man hier sehr schnell ans Ziel: Wegen

$$\sin^2 x = \left(x - \tfrac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \tfrac{2}{3!}x^4 + o(x^5), \quad x \to 0 \tag{58}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - (x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^5))}{x^2(x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^5))} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}x^4 + o(x^5)}{x^4 - \frac{2}{3!}x^6 + o(x^7)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!} + o(x^5)/x^4}{1 - \frac{2}{3!}x^2 + o(x^7)/x^4} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}. \end{aligned}\tag{59}$$

Mit der Regel von de l'Hospital dauert es etwas länger: Wir wenden sie viermal an; die entsprechenden Stellen sind mit $(*)$ gekennzeichnet.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \sin(2x)}{2x\sin^2 x + x^2\sin(2x)} \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos(2x)}{2\sin^2 x + 4x\sin x\cos x + 2x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos(2x)}{2\sin^2 x + 4x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)} &(60) \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\sin(2x)}{4\sin x\cos x + 4\sin(2x) + 8x\cos(2x) + 4x\cos(2x) - 4x^2\sin(2x)} &(61) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin(2x)}{(6 - 4x^2)\sin(2x) + 12x\cos(2x)} &(62) \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{8\cos(2x)}{-8x\sin(2x) + 2(6 - 4x^2)\cos(2x) + 12\cos(2x) - 24x\sin(2x)} &(63) \\ &= \frac{8}{0 + 12 + 12 + 0} = \frac{1}{3} &(64)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe T2 Es gilt $L = r\pi + 2x + 2r$, also $r = (L - 2x)/(\pi + 2)$, also

$$f(x) = \frac{\pi}{2}r^2 + 2rx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{L - 2x}{\pi + 2}\right)^2 + 2\frac{L - 2x}{\pi + 2}x. \tag{65}$$

Weiter gilt $0 \le x \le L/2$ und

$$f(0) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{L}{\pi + 2}\right)^2, \quad f(L/2) = 0. \tag{66}$$

Die Bedingung

$$f'(x) = 4\frac{L - \pi x - 4x}{(\pi + 2)^2} = 0 \tag{67}$$

liefert die eindeutige Extremstelle $x_0 = L/(\pi + 4)$ und mit $f(x_0) > f(0)$ liegt dort das Maximum.

Lösung zu Aufgabe T3

(a) Für die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion f, die beliebig oft differenzierbar ist, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,. \tag{68}$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2!}f''(\xi)x^2 = \ln 2 + \tfrac{1}{2}x - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,, \tag{69}$$

und dies stimmt offenbar auch für $x = 0$ (mit beliebigem ξ). Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$|f(x) - \ln 2 - \tfrac{1}{2}x| = \left|\frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\right| \leq \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,. \tag{70}$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

(b) Wir betrachten $f(x) := \frac{10}{7}\sqrt{1+x}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi \in (-\frac{1}{50}, 0)$ mit

$$\sqrt{2} = f(-\tfrac{1}{50}) = T_{n-1}(f,0)(-\tfrac{1}{50}) + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(-\tfrac{1}{50})^n\,. \tag{71}$$

Jetzt wollen wir n so groß wählen, dass das Restglied betragsmäßig kleiner als 10^{-6} wird. Es zeigt sich, dass dies schon für $n = 3$ erfüllt ist; wegen

$$\left|\tfrac{1}{3!}\left(-\tfrac{1}{50}\right)^3\right| = \tfrac{1}{6\cdot 50^3} = \tfrac{8}{6\cdot 100^3} = \tfrac{4}{3}10^{-6} \tag{72}$$

müssen wir nur noch $|f^{(3)}(\xi)| < \frac{3}{4}$ zeigen. Wegen $|\xi| \leq \frac{1}{50}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(\xi)| &= |\tfrac{10}{7}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot(-\tfrac{3}{2})\cdot(1+\xi)^{-5/2}| = \tfrac{15}{28}(1+\xi)^{-5/2} \\ &\leq \frac{15}{28}\left(\frac{49}{50}\right)^{-5/2} = \frac{15\cdot\sqrt{50}^5}{28\cdot 7^5} \leq \frac{15\cdot 8\cdot 50^2}{28\cdot 7^5} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5\cdot 8\cdot 50^2}{7^6}\,. \end{aligned} \tag{73}$$

Nun möchten wir $\frac{5\cdot 8\cdot 50^2}{7^6} < 1$ zeigen. Dies stimmt wegen

$$7^6 = 49^3 > 48^3 = (2^4\cdot 3)^3 = 2^{12}\cdot 3^3 = 4096\cdot 27 > 4000\cdot 25 = 100000 = 5\cdot 8\cdot 50^2\,. \tag{74}$$

(Natürlich könnte man auch 7^6 ausrechnen.) Als Näherung für $\sqrt{2}$ erhalten wir unter Benutzung von $f'(x) = \frac{10}{7}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ und $f''(x) = \frac{10}{7}\cdot(-\frac{1}{4})(1+x)^{-3/2}$

$$T_2(f,0)(-\tfrac{1}{50}) = f(0) + f'(0)(-\tfrac{1}{50}) + \tfrac{1}{2!}f''(0)(-\tfrac{1}{50})^2 = \tfrac{10}{7}(1 + \tfrac{1}{2}\cdot(-\tfrac{1}{50}) - \tfrac{1}{8}\cdot(-\tfrac{1}{50})^2) \tag{75}$$

$$= \tfrac{10}{7}(1 - \tfrac{1}{100} - \tfrac{1}{20000}) = \tfrac{19799}{14000} \approx 1{,}414214\,. \tag{76}$$

Lösung zu Aufgabe T4

(a) Dass f auf $[-1,1]$ ein Maximum hat, folgt aus der Stetigkeit von f. Wir betrachten nun die Ableitungen $f'(x) = x^3 - 3x + 1$ und $f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Für alle $x \in (-1,1)$ gilt $f''(x) < 0$, d. h. auf diesem Intervall ist f' streng monoton fallend. Wegen $f'(-1) = 3$ und $f'(1) = -1$ existiert also genau ein $\xi \in (-1,1)$ mit $f'(\xi) = 0$. (Beachte: f' ist stetig.) Die Funktion f wächst auf $[-1,\xi]$ streng monoton und fällt auf $[\xi,1]$ streng monoton. Genau in ξ nimmt f also das Maximum an.

(b) Wir wollen ξ, also die Nullstelle von $g(x) := f'(x) = x^3 - 3x + 1$, bestimmen. Das Newtonverfahren hat die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = h(x_n), \qquad \text{mit} \quad h(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3} = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 3}. \tag{77}$$

Mit $x_0 = 0$ ergibt sich $x_1 = \frac{1}{3}$ und $x_2 = (2 \cdot \frac{1}{27} - 1)/(3 \cdot \frac{1}{9} - 3) = \frac{25}{72}$.

Jetzt zur Fehlerabschätzung und in diesem Zusammenhang zu der Frage: Konvergiert das Newtonverfahren hier überhaupt? Aus der Vorlesung ist bekannt: Gilt für die Funktion $h : [a,b] \to [a,b]$ die Abschätzung $|h'(x)| \le q < 1$ auf $[a,b]$, so konvergiert die durch $x_{n+1} := h(x_n)$ definierte Folge gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt ξ von h, und zwar für jedes $x_0 \in [a,b]$. Zudem gilt dann

$$|\xi - x_n| \le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \,. \tag{78}$$

Zunächst müssen wir also ein geeignetes Intervall $[a,b]$ finden. Wir wählen $[0, \frac{1}{2}]$; die Funktion h bildet dieses Intervall in sich ab, denn für $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt $2x^3 - 1 \in [-1, 0]$ und $3x^2 - 3 \in [-3, -2]$, also $h(x) \in [0, \frac{1}{2}]$. Als Ableitung von h erhalten wir

$$h'(x) = 1 - \frac{g'(x)g'(x) - g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{(x^3 - 3x + 1)6x}{(3x^2 - 3)^2}. \tag{79}$$

Wegen $|x^3 - 3x + 1| \le 1$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ gilt also

$$\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}] : \quad |h'(x)| \le \frac{1 \cdot 3}{(\frac{3}{4} - 3)^2} \le \frac{3}{4} =: q < 1\,. \tag{80}$$

Wir erhalten daraus die (nicht besonders gute) Abschätzung

$$|\xi - x_2| \le \frac{q^2}{1-q} |x_1 - x_0| = \frac{\frac{9}{16}}{1 - \frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}\,. \tag{81}$$

(c) Die Gleichung $f'(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ bedeutet $x = \frac{1}{3}(x^3 + 1) =: F(x)$. Die Funktion F erfüllt auf $[0, \frac{2}{3}]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes (für $x \in [0, \frac{2}{3}]$ gilt $F(x) \in [0, \frac{2}{3}]$ und $|F'(x)| = x^2 \le \frac{4}{9} =: q < 1$); also konvergiert die durch $x_{n+1} = F(x_n)$ gegebene Folge für jedes $x_0 \in [0, \frac{2}{3}]$. Aber auch für beliebiges $x_0 \in [-1,1]$ liegt Konvergenz vor, denn schon x_1 liegt dann wieder in $[0, \frac{2}{3}]$.