UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
25. Oktober 2006

## Lösungen zum 1. Übungsblatt

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

**Hinweis:** Es gelten die folgenden Konventionen

- Die Negierung einer Aussage $A$ wird mit $\overline{A}$ statt $\neg(A)$ bezeichnet.
- Die ODER-Verküpfung zweier Aussagen $A, B$ wird als $A+B$ statt $A \cup B$ geschrieben.
- Die UND-Verknupfung zweier Aussagen $A, B$ wird mit $AB$ statt $A \cap B$ geschrieben.
- Ist eine logische Aussage $A$ wahr(falsch) so schreiben wir $A = 1 (A = 0)$.

### Lösung zu Aufgabe H1

(a) (i) zu zeigen $A + AB = A$:

| $\mathbf{A}$ | $B$ | $AB$ | $\mathbf{A + AB}$ |
|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | **0** |
| **0** | 1 | 0 | **0** |
| **1** | 0 | 0 | **1** |
| **1** | 1 | 1 | **1** |

(ii) zu zeigen $A(A + B) = A$:

| $\mathbf{A}$ | $B$ | $A+B$ | $\mathbf{A(A+B)}$ |
|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | **0** |
| **0** | 1 | 1 | **0** |
| **1** | 0 | 1 | **1** |
| **1** | 1 | 1 | **1** |

(b) (i) zu zeigen $A + \overline{A}B = A + B$:

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}B$ | $\mathbf{A + \overline{A}B}$ | $\mathbf{A+B}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | **0** | **0** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | **1** | **1** |
| 1 | 1 | 0 | 0 | **1** | **1** |

(ii) zu zeigen $A(\overline{A} + B) = AB$:

| $A$ | $B$ | $\overline{A}$ | $\overline{A}+B$ | $\mathbf{A(\overline{A}+B)}$ | $\mathbf{AB}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | **0** | **0** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | **0** | **0** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | **0** | **0** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | **1** | **1** |

(c) (i) zu zeigen ist $(A+B)(A+C) = A+BC$:

| $A$ | $B$ | $C$ | $A+B$ | $A+C$ | $\mathbf{(A+B)(A+C)}$ | $BC$ | $\mathbf{A+BC}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | **0** | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | **0** | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | **1** | 0 | **1** |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | **1** | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | **1** | 0 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | **1** |

(ii) zu zeigen ist $AB + AC = A(B+C)$:

| $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $AC$ | $\mathbf{AB+AC}$ | $B+C$ | $\mathbf{A(B+C)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | **0** | 1 | **0** |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | **0** | 1 | **0** |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | **0** | 1 | **0** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | **1** | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | **1** | 1 | **1** |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | **1** | 1 | **1** |

(d) (i) zu zeigen ist $AB + A\overline{B} = A$:

| $\mathbf{A}$ | $B$ | $AB$ | $A\overline{B}$ | $\mathbf{AB+A\overline{B}}$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | **0** |
| **0** | 1 | 0 | 0 | **0** |
| **1** | 0 | 0 | 1 | **1** |
| **1** | 1 | 1 | 0 | **1** |

(ii) zu zeigen ist $(A+B)(A+\overline{B}) = A$:

| $\mathbf{A}$ | $B$ | $A+B$ | $A+\overline{B}$ | $\mathbf{(A+B)(A+\overline{B})}$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 1 | **0** |
| **0** | 1 | 1 | 0 | **0** |
| **1** | 0 | 1 | 1 | **1** |
| **1** | 1 | 1 | 1 | **1** |

**Lösung zu Aufgabe H2** Bezeichnung der logischen Variablen und Festlegungen:

- Gleittür 1 = $A$.
- Gleittür 2 = $B$.
- Gleittür 3 = $C$.
- Alarm = $Z$.
- Ist eine Gleittür geschlossen, so nimmt die zugehörige logische Variable den Wert 1. Z.B. bedeutet $A = 1$, daß die Gleittür 1 geschlossen ist.
- Wird Alarm ausgelöst so hat $Z$ den Wert 1.

— bitte wenden —

(a) Logische Verknüpfungstafel:

| $A$ | $B$ | $C$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Wir stellen jetzt die Aussage $Z = 1$ als Funktion der drei logischen Variablen $A, B, C$ dar, d.h. $Z = f(A, B, C)$. Aus der Verknüpfungstafel lesen wir ab

$$Z = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C. \tag{1}$$

(b) Zur Vereinfachung benutzen wir die Formel aus H1 (d) (i) angewendet auf den ersten und zweiten Term, sowie auf den vierten und fünften Term aus Gleichung (1). Daraus erhält man

$$Z = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}. \tag{2}$$

Nochmalige Anwendung von H1 (d) (i) auf den ersten und dritten Term von (2) ergibt

$$Z = \overline{B} + \overline{A}B\overline{C}. \tag{3}$$

Jetzt Anwendung von H1 (b) (i) liefert das Endergebnis

$$Z = \overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}. \tag{4}$$

(c) Das KV-Diagramm ist eine graphische Methode zur Vereinfachung logischer Ausdrücke.

**Lösung zu Aufgabe H3**

(a) Zuerst stellen wir die logische Verknüpfungstabelle auf und bestimmen daraus dann die logische Funktion.

| $A$ | $B$ | $C$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$\Rightarrow Z = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC.$$

(b) Man sieht sofort (Aufgabe H1 (c) (ii)) , daß man in den ersten zwei Termen von $Z$ die Variable $C$ ausklammern kann und im dritten und vierten Term man $AB$

— bitte wenden —

ausklammern kann, man erhält dann

$$
\begin{aligned}
Z &= \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \\
&= (\overline{A}B + A\overline{B})C + AB(\overline{C} + C) \\
&= (\overline{A}B + A\overline{B})C + AB.
\end{aligned}
$$

Man sieht, daß die Gleichung $Z = (\overline{A}B + A\overline{B})C + AB$ nicht ohne weitere aufwendige Umformungen zuvereinfachen ist. Übrigens stellte der Term $\overline{A}B + A\overline{B}$ gerade das Exklusiv-Oder aus Aufgabe T1 (b) dar.

(c) Jetzt nutzen wir die Tatsache aus, daß $ABC = ABC + ABC + ABC$ ist. Wir haben dann

$$
\begin{aligned}
Z &= \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \\
&= \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC + ABC + ABC \\
&= \overline{A}BC + ABC + A\overline{B}C + ABC + AB\overline{C} + ABC \\
&= BC(\overline{A} + A) + AC(\overline{B} + B) + AB(\overline{C} + C) \\
&= BC + AC + AB.
\end{aligned}
$$

Wieder haben wir die Aufgabe (H1) (c) (ii) benutzt und die beiden Tatsachen, daß $A + \overline{A} = 1$ und $A1 = A$ ist.

**Lösung zu Aufgabe H4** Wir zeigen die Aussage durch Widerspruch:

Für die Diagonale $d$ und die Seite $s$ des Quadrates gilt nach Pythagoras

$$d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2.$$

Jetzt nehmen wir an, daß

$$\frac{d}{s} = \frac{p}{q}$$

gilt. Weiter setzen wir o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) an, daß $p$ und $q$ nicht gleichzeitig gerade Zahlen sind. Dann erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{p^2}{q^2} &= \frac{d^2}{s^2} \\
&= \frac{2s^2}{s^2} = 2 \\
\Rightarrow p^2 &= 2q^2.
\end{aligned}
$$

Dies bedeutet nun, daß $p^2$ eine gerade Zahl ist. Aus der Vorlesung wissen wir aber, daß wenn $p^2$ gerade ist, so ist auch $p$ gerade. Damit hat $p$ die Form $p = 2m$ und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
2q^2 &= p^2 = 4m^2 \\
\Rightarrow q^2 &= 2m^2.
\end{aligned}
$$

Mit obiger Argumentation folgern wir, daß $q^2$ gerade ist und damit auch $q$. Zusammmengefasst erhalten wir, daß $p$ und $q$ gerade Zahlen sind was ein Widerspruch zu unserer obigen Annahme ist. Damit ist die Aussage bewiesen.

— bitte wenden —