Lösung zu Aufgabe T1

Vorbemerkung: Ist I eine Menge und wird jedem $j \in I$ genau eine Menge M_j zugeordnet, dann spricht man von einer Mengenfamilie $M_j,\ j \in I$. Die Menge I wird dann Indexmenge dieser Mengenfamilie genannt. (I braucht keine endliche Menge zu sein.)

(a) Die Behauptungen in diesem Aufgabenteil werden bewiesen, indem man jeweils die beiden Inklusionen $\subset$ und $\supset$ zeigt.

(i) Zu zeigen ist $C_N\left(\bigcup_{j\in I} M_j\right) = \bigcap_{j\in I} C_N(M_j)$.

$\subset$: Sei $x \in C_N\left(\bigcup_{j\in I} M_j\right)$ Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & x \in N \wedge x \notin \bigcup_{j\in I} M_j \Rightarrow x \in N \wedge (x \notin M_j \text{ für alle } j \in I) \\ \Rightarrow\ & x \in C_N(M_j) \text{ für alle } j \in I \Rightarrow x \in \bigcap_{j\in I} C_N(M_j) \end{aligned}$$

Also haben wir $C_N\left(\bigcup_{j\in I} M_j\right) \subset \bigcap_{j\in I} C_N(M_j)$.

$\supset$: Jetzt nehmen wir an, daß $x \in \bigcap_{j\in I} C_N(M_j)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & x \in \bigcap_{j\in I} C_N(M_j) \Rightarrow x \in C_N(M_j) \text{ für alle } j \in I \\ \Rightarrow\ & x \in N \wedge (x \notin M_j \text{ für alle } j \in I) \Rightarrow x \in N \wedge (x \notin \bigcup_{j\in I} M_j) \\ \Rightarrow\ & x \in C_N(\bigcup_{j\in I} M_j) \end{aligned}$$

Also haben wir $C_N\left(\bigcup_{j\in I} M_j\right) \supset \bigcap_{j\in I} C_N(M_j)$.

Damit folgt die Behauptung.

(ii) Zu zeigen ist $C_N\left(\bigcap_{j\in I} M_j\right) = \bigcup_{j\in I} C_N(M_j)$.

$\subset$: Sei $x \in C_N(\bigcap_{j\in I} M_j)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & x \in N \vee x \notin \bigcup_{j\in I} M_j \Rightarrow x \in N \vee x \notin M_j \text{ für alle } j \in I \\ \Rightarrow\ & C_N(M_j) \text{ für alle } j \in I \Rightarrow x \in \bigcup_{j\in I} C_N(M_j) \end{aligned}$$

Also haben wir $C_N\left(\bigcap_{j\in I} M_j\right) \subset \bigcup_{j\in I} C_N(M_j)$.

$\supset$: Sei jetzt $x \in \bigcup_{j\in I} C_N(M_j)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} & x \in C_N(M_j) \text{ für alle } j \in I \Rightarrow x \in N \vee x \notin M_j \text{ für alle } j \in I \\ \Rightarrow\ & x \in N \vee x \notin \bigcap_{j\in I} M_j \Rightarrow x \in C_N(\bigcap j \in I M_j). \end{aligned}$$

Also haben wir $C_N\left(\bigcap_{j\in I} M_j\right) \supset \bigcup_{j\in I} C_N(M_j)$.

— bitte wenden —

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b) (i) Gesucht ist $\chi_{A\backslash B} =?$. Die Differenz zweier Mengen ist definiert als $A\backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap C_X(B)$. Nach Aufgabe H1 (b) (i) ist $\chi_{A\backslash B} = \chi_{A\cap C_X(B)} = \chi_A \chi_{C_X(B)}$. Nach H1 (b) (iii) ist $\chi_{C_N(B)} = 1 - \chi_B$. damit haben wir als Ergebnis

$$\chi_{A\backslash B} = \chi_A(1 - \chi_B).$$

(ii) Analog zu Teil (i) erhalten wir

$$\chi_{B\backslash A} = \chi_B(1 - \chi_A).$$

(iii) Gesucht ist $\chi_{A\Delta B} =?$. Mit $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ und der Tatsache, daß $A\backslash B$, $(B\backslash A)$ disjuinkte Mengen sind, erhalten wir nach H1 (b) (ii) und den obigen zwei Ergebnissen

$$\chi_{A\Delta B} = \chi_{A\backslash B} + \chi_{B\backslash A} = \chi_A(1 - \chi_B) + \chi_B(1 - \chi_A) = \chi_A - 2\chi_A\chi_B + \chi_B.$$

Mit der Tatsache, daß $\chi_A = \chi_A^2$, $\chi_B = \chi_B^2$ ist, haben wir als Ergebnis

$$\chi_{A\Delta B} = (\chi_A - \chi_B)^2.$$

(iv) Gesucht ist $\chi_{A\cup B} =?$, wenn die Mengen A und B nicht disjunkt sind. Wir nutzen jetzt die Tatsache aus, daß für die Vereinigung zweier Mengen das folgende gilt:

$$A \cup B = (A\backslash B) \cup (A \cap B) \cup B\backslash A.$$

Damit erhalten wir mit den Ergebnissen aus H 1 und den obigen Formeln

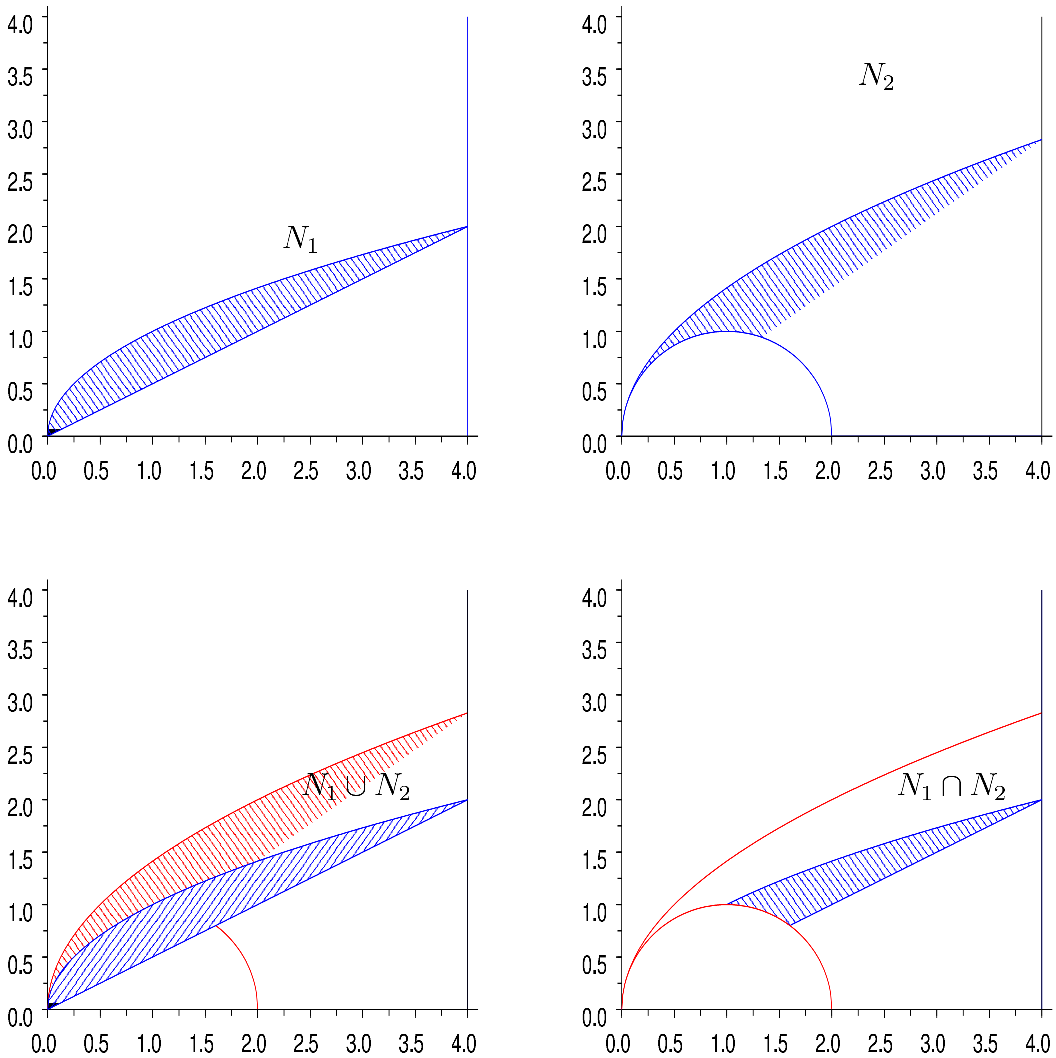
$$\begin{aligned}
\chi_{A\cup B} &= \chi_{(A\backslash B)\cup(A\cap B)\cup(B\backslash A)} \\
&= \chi_A(1 - \chi_B) + \chi_A\chi_B + \chi_B(1 - \chi_A) \\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_B,
\end{aligned}$$

oder als Ergebnis

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}.$$

Lösung zu Aufgabe T2

— bitte wenden —



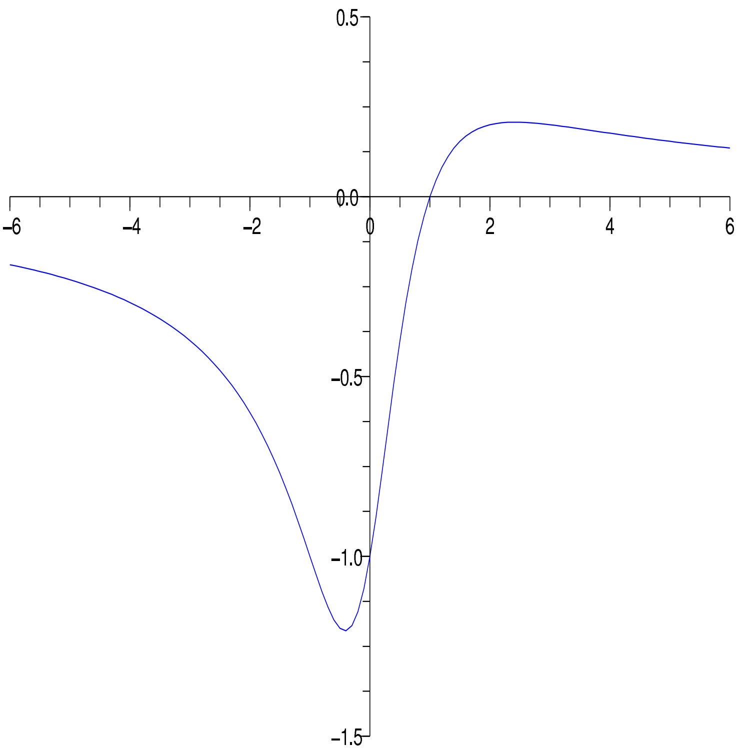
Lösung zu Aufgabe T3

(a) Es sei $y \in Y$ beliebig. Es ist zu zeigen, daß ein es ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Dazu definieren wir zuerst $z := g(y)$. Da h surjektiv ist, existiert zu diesem $z \in Z$ ein $x \in X$ mit $z = h(x) = g(f(x))$, also $g(f(x)) = z = g(y)$. Da nun aber auch g injektiv ist folgt $f(x) = y$.

(b) Wir nehmen an, daß f **nicht** injektiv ist, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dies bedeutet aber $h(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = h(x_2)$, d.h. h ist nicht injektiv.

Lösung zu Aufgabe T4

(a) (i) f ist nicht injektiv, da $f(2) = \frac{1}{5}$ und $f(3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ist. Dies erkennt man durch raten oder wenn man sich die Abbildung graphisch betrachtet.



f ist auch nicht surjektiv, denn für $x < 1$ ist $f(x) < 0$. Sei jetzt $x \geq 1$, dann haben wir

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} <= \frac{x}{x^2+1} <= \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \leq 1.$$

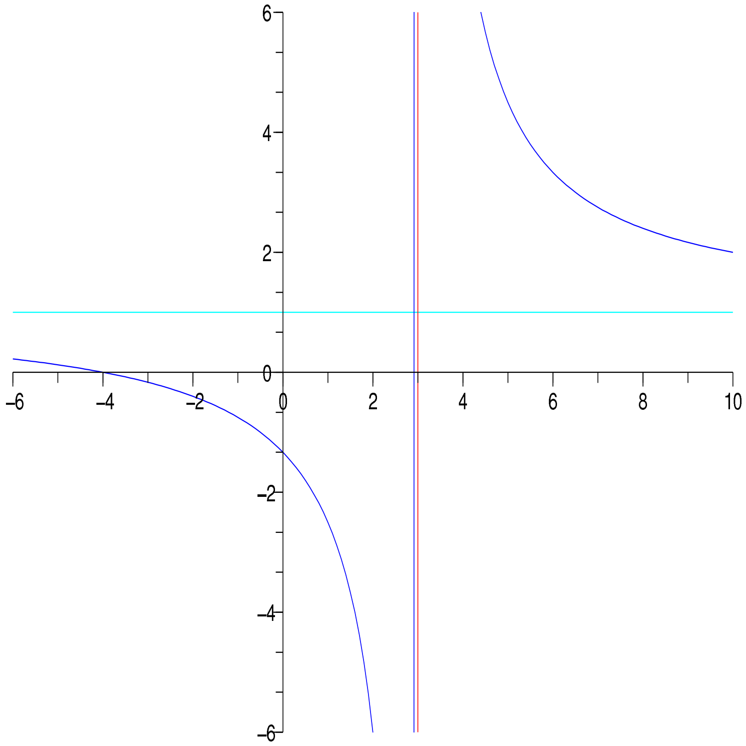
(ii) f ist injektiv. Der Definitionsbereich von f ist $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{3\}$. Weiter gilt für alle $x, y \in D(f)$:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{x+4}{x-3} = \frac{y+4}{y-3} \\ &\Rightarrow \quad (x+4)(y-3) = (y+4)(x-3) \\ &\Rightarrow \quad xy - 3x + 4y - 12 = yx - 3y + 4x - 12 \\ &\Rightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

f ist auch nicht surjektiv, denn $1 \notin f(D)$. Dies sieht man wie folgt: Man nimmt an, daß ein $x \in f(D)$ existiert mit $f(x) = 1$. Daraus folgt dann:

$$f(x) = \frac{x+4}{x-3} = 1 \Rightarrow x + 4 = x - 3 \Rightarrow 7 = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch.



(iii) f ist injektiv, denn für alle $x, y \in [0,1]$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad xu + (1-x)v = yu + (1-y)y \\ &\Rightarrow \quad xu + v - xv = yu + v - yv = x(u-v) = y(u-v) \\ &\Rightarrow \quad (x-y)(u-v) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = y \text{ da } u \neq v. \end{aligned}$$

f ist auch surjektiv: Sei $y \in [u, v]$. dann ist $u \leq y \leq v$ bzw. $0 \leq v-y \leq v-u$. Damit ist $x := \frac{v-y}{v-u} \in \mathbb{R}$, da $u - v \neq 0$ mit $x \in [0,1]$. Für dieses x gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{v-y}{v-u}u + \left(1 - \frac{v-y}{v-u}\right)v \\ &= \frac{1}{v-u}\left(vu - yu + v^2 - uv - v^2 + yv\right) \\ &= \frac{1}{v-u}(yv - yu) = y. \end{aligned}$$

Also haben wir zu $y \in [u, v]$ das Urbild $x = \frac{v-y}{v-u}$ von y unter f.

(b) (i) Die Funktion $f(x) = 7x + 6$ ist eine Gerade, folglich ist f bijektiv und die Umkehrfunktion existiert. Diese berechnet sich zu

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}.$$

— bitte wenden —

(ii) Man kann zeigen, daß quadratische Polynome im allgemeinen weder injekt noch surjektiv sind . Durch geschickte Einschrkung des Definitions- und Wertebereiches kann man die Bijektivität aber erreichen. Sei jetzt $f(x) = x^2 + 4x - 2$. Das Polynom hat seinen Scheitelpunkt bei $x = -2$ mit dem zugehörigen Funktionwert $f(-2) = -6$. Dies sieht man am schnellsten, wenn man die Parabel graphisch betrachtet. Daraus erhalten wir jetzt zwei Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : \{x \in \mathbb{R}|\ x \leq -2\} &\rightarrow \{f_1(x) \in \mathbb{R}|\ f_1(x) \geq -6\} \\ x &\mapsto f_1(x) = x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2 : \{x \in \mathbb{R}|\ x \geq -2\} &\rightarrow \{f_2(x) \in \mathbb{R}|\ f_1(x) \geq -6\} \\ x &\mapsto f_2(x) = x^2 + 4x - 2. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Umkehrfunktionen zu f_1 und f_2 sind dann

$$\begin{aligned} f_1^{-1} : \{x \in \mathbb{R}|\ x \geq -6\} &\rightarrow \{f_1^{-1}(x) \in \mathbb{R}|\ f_1(x) \leq 2\} \\ x &\mapsto f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x+6} - 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_2^{-1} : \{x \in \mathbb{R}|\ x \geq -6\} &\rightarrow \{f_2^{-1}(x) \in \mathbb{R}|\ f_1(x) \geq -2\} \\ x &\mapsto f_2^{-1}(x) = \sqrt{x+6} - 2. \end{aligned}$$