UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
18. November 2006

Lösungen zum 4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösung zu Aufgabe H1

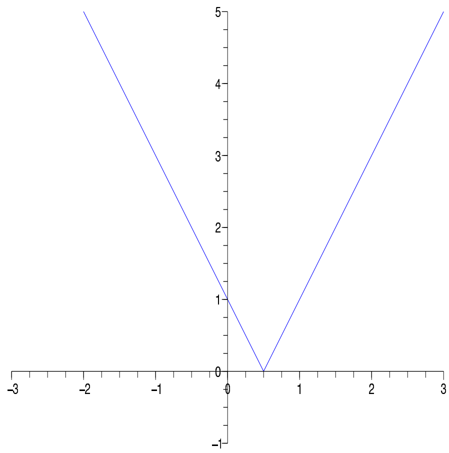
(a) Wir erinnern nochmals an die Definition der Betragsfunktion

$$|x| := \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -\ x \text{ für } x < 0 \end{cases}.$$

Die Gerade $y = 2x - 1$ hat die Nullstelle $x = \frac{1}{2}$. Links dieser Nullstelle ist $2x - 1 < 0$ und rechts davon ist $2x - 1 > 0$. Damit haben wir

$$y = \begin{cases} 2x - 1 \text{ für } x \geq \frac{1}{2} \\ -\ (2x - 1) \text{ für } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

.



(b) Der Ausdruck $\dfrac{x^2}{1-4x}$ ist nicht definiert für $x = \dfrac{1}{4}$.

Dann ist $\left|\dfrac{x^2}{1-4x}\right|$ äquivalent zu $x^2 < |1 - 4x|$ für $x \neq \dfrac{1}{4}$.

Wir müssen also die beiden Fälle $x > \dfrac{1}{4}$ und $x < \dfrac{1}{4}$ untersuchen.

— bitte wenden —

$x < \dfrac{1}{4}$: In diesem Fall ist $1-4x > 0$ und damit $|1-4x| = 1-4x$. Daraus folgt dann

$$x^2 < 1-4x \to x^2+4x < 1 \to (x+2)^2 < 5 \to |x+2| < \sqrt{5}.$$

Dies bedeutet aber $-\sqrt{5} < x+2 < \sqrt{5}$ bzw. $-\sqrt{5}-2 < x < \sqrt{5}-2$ also $x \in (-\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-2)$. Weiter ist $\sqrt{5} \approx 2.236...$ also $\sqrt{5}-2 < \frac{1}{4}$, also die Anfangsvoraussetzung ist erfüllt.

$x > \dfrac{1}{4}$: Hier ist $1-4x < 0$, also ist $|1-4x| < -(1-4x) = 4x-1$. Daraus erhält man

$$x^2 < 4x-1 \to x^2-4x < -1 \to (x-2)^2 < 3 \to |x-2| < \sqrt{3}.$$

Dies bedeutet aber $-\sqrt{3} < x+2 < \sqrt{3}$ bzw. $2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$ also $x \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$. Weiter ist $\sqrt{3} \approx 1.732...$ also $2-\sqrt{3} > \frac{1}{4}$, also die Anfangsvoraussetzung ist erfüllt.

Zusammenfassend gilt die Ungleichung für alle reellen Zahlen aus den beiden disjunkten offenen Intervallen $x \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ und $x \in (-\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-2)$. Insgesamt $x \in (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{5}-2, \sqrt{5}-2)$.

(c) Wir haben in der Gleichung die Terme $|x|$ und $|x-1|$. Deshalb müssen wir die Gleichung in den drei Teilintervallen $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$ untersuchen. Vereinfachend betrachten wir die nachfolgende Tabelle:

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
x	negativ	positiv	positiv
$\|x\| =$	$-x$	x	x
$x-1$	negativ	negativ	positiv
$\|x-1\| =$	$-(x-1)$	-(x-1)	x-1

(i) Für $x < 0$ haben wir die Gleichung $(x+1)^2 = -x-(x-1)+1$ zu lösen. Wir erhalten

$$x^2+2x+1 = -x-(x-1)+1 \Leftrightarrow x^2+4x-1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 5.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -2+\sqrt{5}$, $x_2 = -2-\sqrt{5}$. Da aber nach Voraussetzung x negativ sein muß erfüllt nur x_2 die ursprüngliche Gleichung $(x+1)^2 = |x|+|x-1|+1$.

(ii) Für $0 < x < 1$ müssen wir die Gleichung $(x+1)^2 = x-(x-1)+1$ lösen. Wir haben dann

$$x^2+2x+1 = x-(x-1)+1 \Leftrightarrow x^2+2x-1 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 2.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_3 = -1+\sqrt{2}$, $x_4 = -1-\sqrt{2}$. Da aber nach Voraussetzung $x \in (0,1)$ ist, erfüllt nur x_3 die ursprüngliche Gleichung $(x+1)^2 = |x|+|x-1|+1$.

(iii) Für $x > 1$ haben wir die Gleichung $(x+1)^2 = x + x - 1 + 1$ zu lösen. Wir erhalten

$$x^2 + 2x + 1 = x + x \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat keine reelle Lösungen.

Also hat die Gleichung $(x+1)^2 = |x| + |x-1| + 1$ die Lösungen $x_2 = -2 - \sqrt{5}$ und $x_3 = -1 + \sqrt{2}$.

(d) Es gilt

$$\big|7 - |x-5|\big| \leq 3 \quad \leftrightarrow \quad -3 \leq 7 - |x-5| \leq 3 \quad \leftrightarrow \quad 10 \geq |x-5| \geq 4.$$

Im Falle $x \geq 5$ geht dies über in $10 \geq x - 5 \geq 4$, also $15 \geq x \geq 9$ und im Falle $x < 5$ ergibt sich $10 \geq 5 - x \geq 4$, also $-5 \leq x \leq 1$.

Insgesamt: Die Ungleichung ist erfüllt für $x \in [-5, 1] \cup [9, 15]$.

Lösung zu Aufgabe H2 (Da uns keine Maximalpunktzahl, die pro Klausur erreicht werden konnte, bekannt ist, beachten wir eine solche auch nicht.) Man kann die Formel mit vollständiger Induktion beweisen; wir wollen hier aber einen anderen Weg gehen. Dazu betrachten wir die k zu verteilenden Punkte:

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \cdots \bullet \bullet$$

Eine bestimmte Verteilung können wir dann veranschaulichen, indem wir $n-1$ senkrechte Striche zwischen den k Punkten verteilen, also z. B. so:

$$\bullet \bullet \bullet \,|\,|\, \bullet \,|\, \cdots \,|\, \bullet \bullet$$

Hier hat der erste Studierende drei Punkte, der zweite keinen, der dritte einen, ...; der letzte schließlich hat zwei. Um eine Verteilung darzustellen, müssen wir also stets $n - 1 + k$ Symbole hintereinanderschreiben, nämlich genau k Punkte und $n-1$ Striche. Dabei wählen wir aus, an welchen Positionen Punkte stehen sollen. Folglich gibt es so viele verschiedene Verteilungen wie es k-elementige Teilmengen einer $(n-1+k)$-elementigen Menge gibt; laut Vorlesung sind dies aber genau

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Lösung zu Aufgabe H3

(i) $z^3 = (3-i)^3 = (3-i)(9-6i+i^2) = (3-i)(8-6i) = 24-18i-8i+6i^2 = 18-26i$. Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26.

(ii) Wir erweitern den Bruch geeignet:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{3^2 - i^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$.

(iii) Es ergibt sich $z \cdot w = (3-i)(-1+2i) = -3+6i+i-2i^2 = -1+7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7.

(iv) Es ist $\overline{z}^2 = \left(\overline{3-i}\right)^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

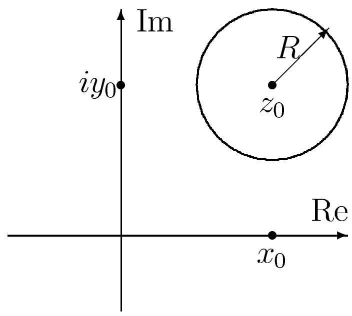
$\overline{z}^2 + 1/w^2 = (8+6i) + (-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $7\frac{22}{25}$ und Imaginärteil $6\frac{4}{25}$.

Lösung zu Aufgabe H4

(a) (i) $|z-z_0| = |(x+iy)-(x_0+iy_0)| = |(x-x_0)+i(y-y_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ ist der Abstand des Punktes z vom Punkt z_0 in der komplexen Ebene. Daraus folgt dann, daß die Gleichung $|z-z_0| = R$ ein Kreis um den Punkt z_0 mit Radius R ist, denn

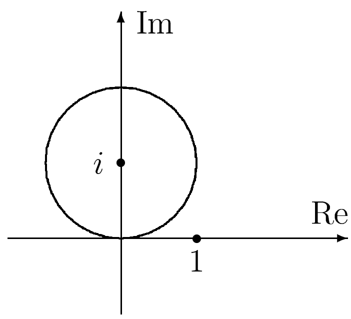
$$|z-z_0| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2.$$

Vergleiche die Kreisdefinition aus Übungsblatt 2 H2.



(ii) Nach Teil (i) ist $|z-i| = 1$ die Gleichung eines Kreises um den Punkt $z_0 = i$ mit Radius $R = 1$, denn es ist

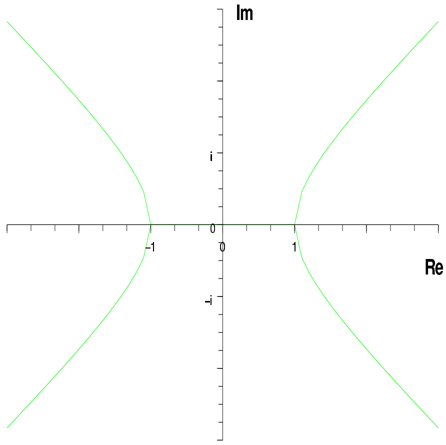
$$|z-i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1.$$



(iii) Gesucht ist die Kurve die durch $Rez^2 = 1$ beschrieben wird. Da $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ist, haben wir den Realteil $Rez^2 = x^2 - y^2$. Daraus folgt

$$Rez^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1.$$

Die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ ist die Gleichung der rechtwinkeligen Hyperbel mit den Scheiteln $x = \pm 1, \ y = 0$.



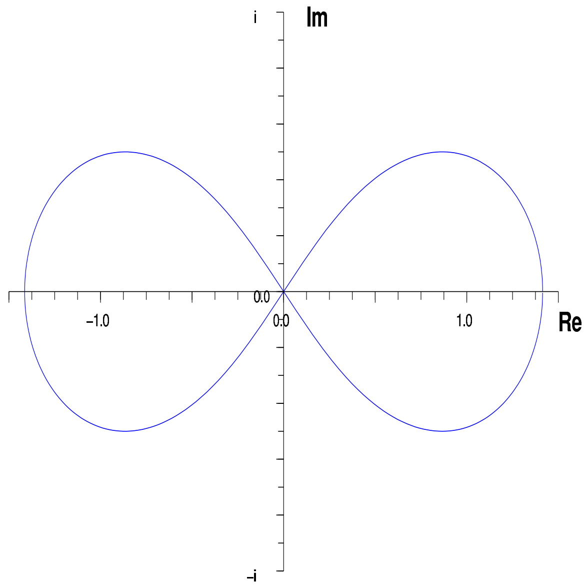
(iv) Wir rechnen den Ausdruck $|z^2 - 1|^2 = 1$ einfach aus und erhalten

$$\begin{aligned} 1 &= |z^2 - 1|^2 = |(x + iy)^2 - 1|^2 = |(x^2 - y^2 - 1) + 2ixy|^2 \\ &= (x^2 - y^2 - 1)^2 + (2xy)^2 = x^4 + y^4 + 1 - 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 + 4x^2y^2 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 1 - 2x^2 + 2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) + 1 \end{aligned}$$

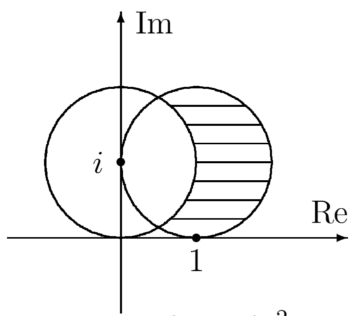
Daraus folgt das Ergebnis

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$

Diese letzte Gleichung stellt eine sogenannte Lemniskate mit den Scheiteln $x = \pm\sqrt{2}, y = 0$ dar.



(b) Durch $1 \leq |z-i|$ wird das Äußere einer Kreisscheibe mit Radius 1 um den Punkt i in der komplexen Zahlenebene beschrieben; durch $|z-i-1| \leq 1$ eine Kreisscheibe mit Radius 1 um $i+1$ (die Kreislinie gehört jeweils dazu). Die Menge K ist daher der in der Skizze schraffierte Bereich; der Rand gehört dazu.



(c) Zuerst bemerken wir, daß der Ausdruck $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ für $z = 1$ nicht definiert ist. Also erhalten wir mit $z = x + iy$ und $z \neq 1$:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-|z|^2+z-\bar{z}}{1+|z|^2-(z+\bar{z})}.$$

Nun ist $|z|^2 = x^2 + y^2$ und $z - \bar{z} = 2i\, Im\, z = 2iy$, $z + \bar{z} = 2Re\ z = 2x$. Damit erhalten wir

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-x^2-y^2+2iy}{1+x^2+y^2-2x}.$$

Da der Nenner im letzten Ausdruck reell ist bezeichnen wir ihn im folgenden mit N. Wir habe dann

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{N}\left(1-x^2-y^2+2iy\right).$$

Quadrieren ergibt

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \frac{1}{N^2}\left((1-x^2-y^2)^2-4y^2+4iy(1-x^2-y^2)\right).$$

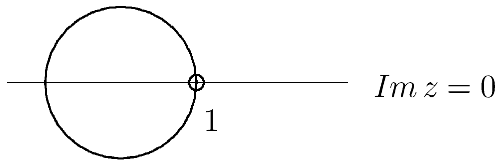
— bitte wenden —

Damit dieser Ausdruck reell ist muß der Imaginärteil verschwinden, d.h.

$$\frac{1}{N^2}4y(1-x^2-y^2)=0,$$

dies ist erfüllt für $y=0$, also die reelle Achse und $x^2+y^2=1$, d,h, der Einheitskreis. Weiter müssen wir den Punkt $z=1$ auschließen, da $\frac{1+z}{1-z}$ dort nicht definiert ist.

Komplexe Ebene $\mathbb{C}$



— bitte wenden —