UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. A. Melcher

WS 2006/2007
23. November 2006

Lösungen zum 5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

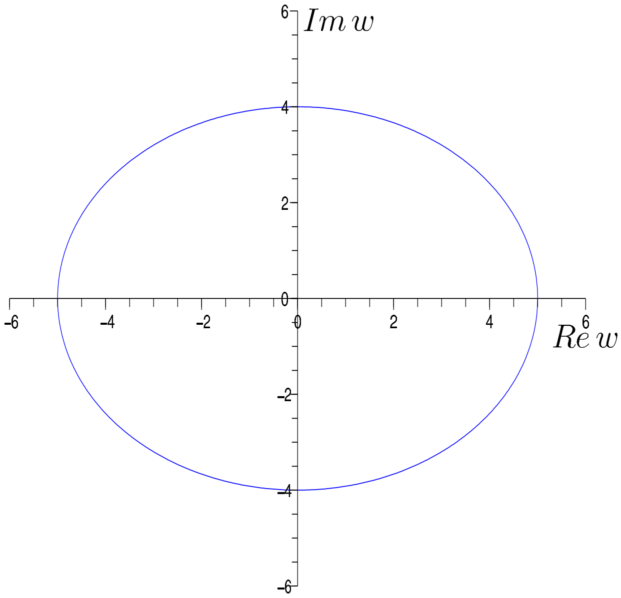
Lösung zu Aufgabe H1

(a) Zuerst schreiben wir den Ausdruck in Polarkoordinaten um. Wir haben $1 \pm \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201} &= \left(\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}\right)^{201} = \left(\frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{2}\right)^{402} \\ &\underbrace{=}_{\text{Moivre}} \cos\left(\frac{402\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{402\pi}{3}\right) = \cos(134\pi) + i\sin(134\pi) \\ &= 1. \qquad (1)\end{aligned}$$

(b) Gesucht ist die Kurve in der komplexen z-Ebene die durch die Gleichung $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z-3\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z+3\right| = 10$ beschrieben wird. Zur Vereinfachung substituieren wir $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z$ und bestimmen zuerst die Kurve die in der komplexen w-Ebene durch $|w-3|+|w+3| = 10$ beschrieben wird. Mit $w = u+iv$ erhalten wir

$$\begin{aligned}|w+3|+|w-3| = 10 \quad &\Leftrightarrow \quad |u+3+iv|^2 = (10-|u-3+iv|)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (u+3)^2+v^2 = 100-20|u-3+iv|+(u-3)^2+v^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 20|u-3+iv| = 100-12u \\ &\Leftrightarrow \quad |u-3+iv|^2 = \left(5-\frac{3}{5}u\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (u-3)^2+v^2 = 25-6u+\frac{9}{25}u^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{16}{25}u^2+v^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{16} = 1. \qquad (2)\end{aligned}$$



Diese letzte Gleichung stellt in der w-Ebene eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 4$ dar. Im nächsten Schritt müssen wir die Substitution $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z$ rückgängig machen. Die Formel $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ stellt eine Drehung der komplexen Zahl z um den Winkel $-\frac{\pi}{4}$ dar, denn wir haben $w = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) r\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right)$. Wegen $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right| = 1$ haben wir dann $w = r\left(\cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$. Folglich haben wir in der z-Ebene eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ die um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ gedreht ist. Die reelle Gleichung für diese gedrehte Ellipse berechnet sich wie folgt: Es sei $w = u + iv$ und $z = x + iy$. Aus $w = r\left(\cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ folgt dann mit $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$u = x\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \tag{3}$$

$$v = y\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - x\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x). \tag{4}$$

Dies in die Gleichung $\frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{16} = 10$ eingesetzt ergibt:

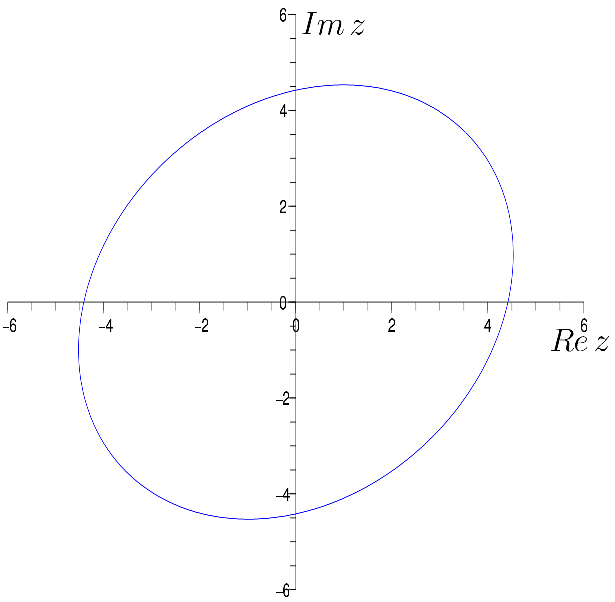
$$10 = \frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{16} = \frac{1}{25}\left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{50}(x+y)^2 + \frac{1}{32}(x-y)^2 \\ &= \left(\frac{1}{50}+\frac{1}{32}\right)x^2 + 2\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{32}\right)xy + \left(\frac{1}{50}+\frac{1}{32}\right)y^2 \\ &= Ax^2 + 2Bxy + C^2 \end{aligned} \tag{5}$$

mit $A = C = \left(\frac{1}{50}+\frac{1}{32}\right)$, $B = \left(\frac{1}{50}-\frac{1}{32}\right)$.

Also haben wir als Ergebnis

$$\frac{41}{800}x^2 - \frac{9}{400}xy + \frac{41}{800}y^2 = 10. \tag{6}$$



(c) Wir betrachten die Gleichung $z^n = 1$ bzw. $z^n - 1 = 0$. Nach der Vorlesung hat diese Gleichung die Lösungen $\epsilon^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$. Damit können wir schreiben mit $\epsilon^0 = 1$

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \epsilon^k) = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\epsilon^k). \tag{7}$$

Andererseits können wir den Ausdruck $z^n - 1$ als Teleskopsumme schreiben:

$$\begin{aligned} z^n - 1 &= z^n - z^{n-1} + z^{n-1} - z^{n-2} + z^{n-2} - + \ldots - z^2 + z^2 - z + z - 1 \\ &= = z^{n-1}(z-1) + z^{n-2}(z-1) + \ldots + z(z-1) + (z-1) \\ &= (z-1)\sum\nolimits_{k=0}^{n-1} z^k. \end{aligned} \tag{8}$$

Daraus folgt ((7) und (8) gleichsetzen) dann die Behauptung

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{k=1}^{n-1}(z-\epsilon^k). \tag{9}$$

Dieses Ergebnis gilt $z \neq 1$. Der Fall $z = 1$ wird hier nicht betrachtet.

(d) Wir betrachten den Ausdruck

$$1-\epsilon^k = 1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right). \tag{10}$$

Mit $1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$ und $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ erhalten wir dann:

$$1-\epsilon^k = 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)+2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right). \tag{11}$$

Jetzt benutzen wir die Formel $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \prod_{k=1}^{n-1}(z-\epsilon^k)$ aus Teil (c) mit $z = 1$. Dies liefert dann

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} 1 &= \prod_{k=1}^{n-1}(1-\epsilon^k) \Leftrightarrow n = \prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\\ \Leftrightarrow n &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Das Produkt $\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ muß reell sein. Weiter ist der Betrag $\left|\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right| = 1$ und $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$. Also ist

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = 1. \tag{13}$$

Daraus folgt dann

$$n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right). \tag{14}$$

Ersetzt man in der letzten Formel n durch $2n+1$ so erhält man

$$2n+1 = 2^{2n}\prod_{k=1}^{2n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right). \tag{15}$$

Für $k = 1, \dots, n$ ist $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sin\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)$.
Also kann man je zwei Faktoren zusammenfassen und man erhält

$$2n+1 = 2^{2n}\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right). \tag{16}$$

Lösung zu Aufgabe H2

(a) Mit $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)$ gilt nach der Formel von Moivre:

$$z^6+1 = 0 \Leftrightarrow r^6(\cos(6\phi)+i\sin(6\phi)) = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow r = 1 \text{ und } \phi = (2k+1)\frac{\pi}{6},\ k = 0,\ldots 5, \tag{17}$$

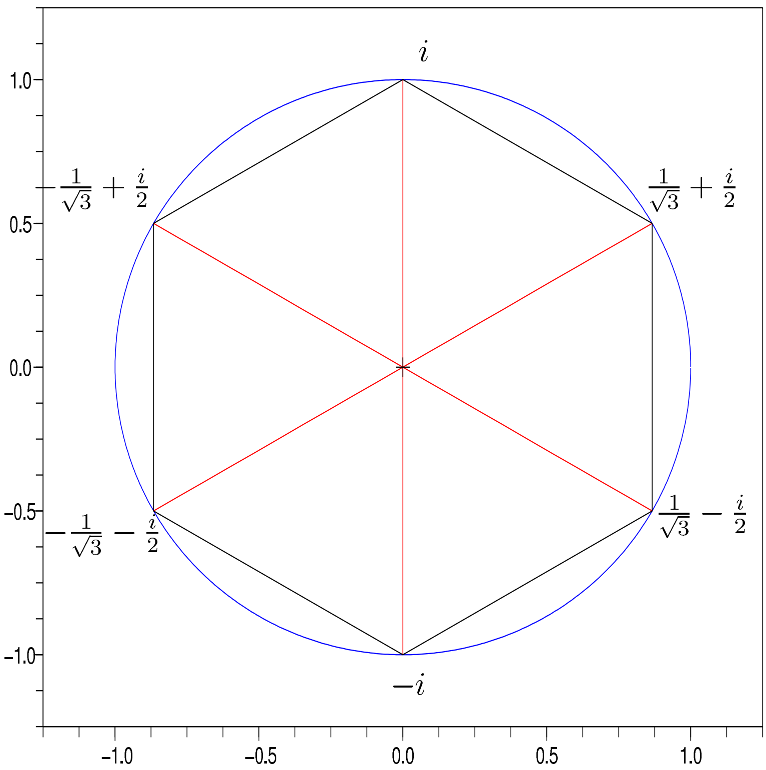
also

$$z_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right),\ k = 0,\ldots 5. \tag{18}$$

Dabei haben wir die Formel zur Bestimmung der n-ten Einheitswurzel benutzt:

$$z^n = 1 \Rightarrow z_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right),\ k = 0,\ldots n-1. \tag{19}$$

Geometrisch bedeutet dies, daß die n Einheitswurzeln auf dem Einheitheitskreis liegen und sie bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Eckes mit einer Ecke bei $z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Hier also ein 6-Eck mit einer Ecke bei $z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.



(b) Mit $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)$ gilt $8(1-\sqrt{3}i) = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Daraus folgt:

$$z^4 + 8(1-\sqrt{3}i) \quad \Leftrightarrow \quad r^4(cos(4\phi) + i\sin(4\phi)) = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad r = 2 \text{ und } \phi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k = 0, \ldots 3, \tag{20}$$

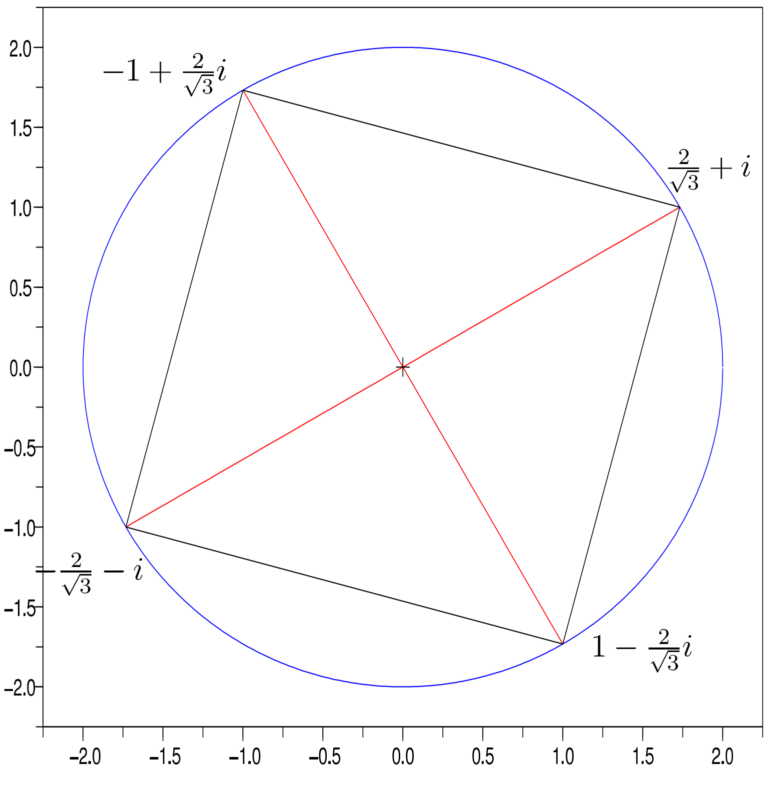
also

$$z_k = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)\right), k = 0, 1, 2, 3. \tag{21}$$

Dabei haben wir die folgende Formel benutzt: Mit $r = |a|$ und $\phi = \arg a$ haben wir

$$z^n = a \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, \ldots n-1. \tag{22}$$

Geometrisch bedeutet dies, daß die Wurzeln z_k liegen auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $R = \sqrt[n]{r}$ und unterteilen diesen Kreis in n gleiche Bögen der Länge $\frac{2\pi}{n}R$. Hier liegt also ein Quadrat (4-Eck) vor mit einer Ecke bei $z_0 = 2cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.



(c) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $iz^2 - (1 + 3i)z + 2 + 2i = 0$. Division durch i bzw. Multiplikation mit $-i$ liefert $z^2 - (3-i)z + 2 - 2i = 0$. Quadratische Ergänzung liefert dann

$$\left(z - \frac{3-i}{2}\right)^2 = \frac{i}{2}. \tag{23}$$

Also lösen wir zuerst die Gleichung $w^2 = \frac{i}{2}$ mit $w = z - \frac{3-i}{2}$.
Wir erhalten dann $w_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)$, $k = 1, 2.$, d.h.
$w_1 = \frac{1+i}{2}$, $w_2 = -\frac{1+i}{2}$. Daraus folgt dann $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2$.

Bemerkung: Alternativer Lösungsweg ist die wohlbekannte $p, q - Formel$. Wir haben nach Multplikation mit $-i$:

$$\begin{aligned} z^2 - (3-i)z + 2 - 2i &= 0 \\ \Leftrightarrow z_{1,2} &= \frac{3-i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3-i}{2}\right)^2 - (2-2i)} \\ &= \frac{3-i}{2} \pm \sqrt{\frac{i}{2}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Nun ist $\sqrt{\frac{i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1+i}{2}$.
Daraus erhält man dann

$$z_{1,2} = \frac{3-i}{2} \pm \frac{1+i}{2} \Rightarrow z_1 = 1 - i,\ z_2 = 2. \tag{25}$$

(d) Jetzt haben wir eine sogenannte biquadratische Gleichgung zu lösen. Mit Hilfe der Substitution $w = z^2$ erhalten wir

$$z^2(1 - z^2) = 16 \Leftrightarrow (w(1-w) = 16 \Leftrightarrow w^2 - w + 16 = 0. \tag{26}$$

Lösung der der Gleichung für w mit der $p - q$-Formel ergibt:

$$w_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 16} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}i. \tag{27}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{7}i \Rightarrow z_{1,2} = \pm\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}i\right) \\ w_2 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{7}i \Rightarrow z_{1,2} = \pm\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}i\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Lösung zu Aufgabe H3

Vorbemerkung: Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind linear unabhängig wenn gilt

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ für } \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Diese Aussage ist äquivalent zu

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \qquad \text{(Spatprodukt)}. \tag{30}$$

(a) Wir setzen an

$$\begin{aligned}
\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} &= \vec{0} \\
&\Longleftrightarrow \\
\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\
-\alpha + 3\beta + 2\gamma &= 0 \\
2\alpha - 2\beta - 2\gamma &= 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Jetzt Addition von (1) + (2) sowie $2 \cdot (2) + (3)$ liefert

$$\begin{aligned}
5\beta + \gamma &= 0 \\
4\beta + 2\gamma &= 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Addition von $2 \cdot (4) + (5)$ liefert

$$6\beta = 0 \Longrightarrow \beta = 0 \tag{33}$$

. Daraus folgt dann in (4) oder (5) eingesetzt

$$\gamma = 0. \tag{34}$$

$\beta = \gamma = 0$ in (1) oder (2) oder (3) liefert dann

$$\alpha = 0. \tag{35}$$

Folglich sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind linear unabhängig.

(b) Wir haben nach Voraussetzung, daß $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ sind linear unabhängig. Weiter ist $\vec{a} = \vec{x} \times \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{x} \times \vec{z}$, $\vec{c} = \vec{y} \times \vec{z}$ und die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind vom Nullvektor veschieden. Weiter gilt mit dem Spatprodukt haben wir $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \neq 0$. Wir machen jetzt den Ansatz

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}. \tag{36}$$

Multiplikation dieser letzten Gleichung mit $\vec{x}$ bzw. $\vec{y}$ und $\vec{z}$ liefert das folgende Gleichungssystem. (Man beachte, daß durch die Multiplikation in dieser Gleichung Ausdrcke wie $\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x}$ skalar werden.)

$$\begin{aligned}
\alpha \underbrace{(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x}}_{=0} + \beta \underbrace{(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}}_{=0} + \gamma(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} &= 0 \\
\alpha \underbrace{(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{y}}_{=0} + \beta(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{y} + \gamma \underbrace{(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{y}}_{=0} &= 0 \\
\alpha(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} + \beta \underbrace{(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{z}}_{=0} + \gamma \underbrace{(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{z}}_{=0} &= 0
\end{aligned} \tag{37}$$

also haben wir

$$\gamma(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = 0,\ \beta(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{y} = 0,\ \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = 0. \tag{38}$$

Dies aber bedeutet aber wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ in Verbindung mit der Defintion des Spatproduktes, daß

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \tag{39}$$

gelten muß.

Dabei haben wir benutzt, daß für Vektoren $\vec{m}$ und $\vec{n}$ die Beziehung

$$(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{m} = 0 \text{ bzw. } (\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \tag{40}$$

gilt.(Einfach die Defintion einsetzten und aussrechnen).

Weiter haben wir verwendet, daß das Spatprodukt $(\vec{x}.\vec{y}, \vec{z}) \neq 0$ ist, wenn $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ linear unabhängig sind, d.h.

$$\begin{aligned}
(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} &= \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \neq 0 \\
(\vec{x} \times \vec{z}) \cdot \vec{y} &= -(\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y} = -\vec{z}(\vec{x} \times \vec{y}) = -(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \neq 0 \\
(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} &= (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}).
\end{aligned} \tag{41}$$

(c) Wir haben

$$\begin{aligned}
0 &= (\alpha f + \beta g + \gamma h)(x) = \alpha - \alpha x + 2\alpha x^2 + 2\beta - \beta x^2 - \gamma + 3\gamma x - 7\gamma x^2 \\
&= (\alpha + 2\beta - \gamma) + x(-\alpha + 3\gamma) + x^2(2\alpha - \beta - 7\gamma) \\
&= 0 + x \cdot 0 + 0 \cdot x^2,
\end{aligned} \tag{42}$$

denn $1 = x^0,\ x,\ x^2$ sind linear unabhängig. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\
-\alpha + 3\gamma &= 0 \\
2\alpha - \beta - 7\gamma &= 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir jetzt $\alpha = 3\gamma$. Dies setzten wir in die dritte Gleichung ein und erhalten $6\gamma - \beta - 7\gamma = 0$ bzw. $\beta = -\gamma$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt $3\gamma - 2\gamma - \gamma = 0$, d.h. $0 = 0$. Dies bedeutet wir können $\gamma \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Für $\gamma = 0$ erhalten wir $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dies wrde bedeuten, daß die drei Polynome linear unabhängig wären, dies kann aber nicht sein, denn für z.B. $\alpha = 3,\ \beta = -1, \gamma = 1$ gilt ebenfalls $(\alpha f + \beta g + \gamma h)(x) = 0$.

Also sind $f,\ g,\ h$ linear abhängig.

Lösung zu Aufgabe H4 Ist $\vec{x} = \vec{y}$, so folgt natürlich $\vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{y} \cdot \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Gilt umgekehrt dies, so folgt

$$\forall a \in \mathbb{R}^n : \quad (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{a} = \vec{x} \cdot \vec{a} - \vec{y} \cdot \vec{a} = 0. \tag{44}$$

Da die Gleichung für alle Vektoren $\vec{a}$ gilt, muss sie insbesondere für $\vec{a} = \vec{x} - \vec{y}$ gelten: $(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = 0$, also $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 0$, d. h. $\vec{x} = \vec{y}$.